

Formelsammlung

Regelungstechnik I

Basierend auf Arbeit von Florian Beermann

Letzte Änderung am 29.04.2008: Frank Bättermann

Inhaltsverzeichnis

1. Steuerung und Regelung	3
1.3 Vorteile der Regelung.....	3
1.5 Vergleich von Steuer- und Regelung.....	3
1.7 Ziele der Regelung.....	3
3. Systemdarstellung	4
3.1 Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich.....	4
3.3 Zustandsraumdarstellung.....	4
4. Stabilität	5
4.1 Definition.....	5
4.2 Hurwitzkriterium.....	5
5. Dynamische Eigenschaften	6
5.1 Überschwingweite.....	6
5.4 Dominante Pole.....	6
6 Blockschaltbilder	7
6.1 Lineare Übertragungsglieder.....	7
6.2 Umformungen.....	7
7 Regelkreis	9
7.1 Übertragungsfunktionen.....	9
7.2 Stabilität.....	10
7.4 Vereinfachter Regelkreis.....	10
7.5 Einfache Reglertypen.....	11
8. Wurzelortskurve	13
8.1 Gebietsvorgabe im Laplace-Bereich.....	13
8.2 Eigenschaften.....	14
9. Frequenzgang	15
9.1 Frequenzantwort.....	15
9.3 Frequenzkennlinien elementarer Glieder.....	15
9.4 Rechenregeln.....	17
10. Reglereinstellungen im Frequenzbereich	18
10.1 Offener und geschlossener Regelkreis.....	18
10.2 Auslegung von P-Reglern	19
10.3 Auslegung von PI- und PID-Reglern.....	19
11 Erweiterte Regelungsstrukturen	20
11.1 Kaskadenregelung.....	20
11.2 Vorsteuerung.....	20
12 Einstellregeln	21
12.1 Betragsoptimum.....	21
12.2 Symmetrisches Optimum.....	22
13 Anhang	23
13.1 Laplace-Korrespondenzen.....	23
13.2 Laplace-Rechenregeln.....	24

1. Steuerung und Regelung

1.3 Vorteile der Regelung

- Reaktion auf externe Störungen
- Ausgleich von Fehlern ungenauer Modelle
- Veränderung der Umgebung hat keinen Einfluss

1.5 Vergleich von Steuer- und Regelung

<i>Regelung</i>	<i>Steuerung</i>
geschlossene Wirkungskette	offene Wirkungskette
zu regelnde Größe wird gemessen und verglichen	Zu steuernde Größe wird nicht gemessen und verglichen
Bei instabilen Systemen müssen Regelungen eingesetzt werden	Steuerung sind bei instabilen Systemen unbrauchbar
Wirkt allen Störungen entgegen, die an den zu regelnden System angreifen	Reagiert nur auf von vornherein bekannte Störungen

1.7 Ziele der Regelung

- Stabilität
- genügend Dämpfung
- hinreichende Schnelligkeit
- keine zu hohen Stellausschläge

3. Systemdarstellung

3.1 Übertragungsfunktion im Laplace-Bereich

$$F(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_m \cdot s^m + \dots + b_1 \cdot s + b_0}{a_n \cdot s^n + \dots + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{B(s)}{A(s)}$$

m : Grad des Zählers
 n : Grad des Nenners
 d : Differenzgrad ($n - m$)
 $A(s)$: charakteristisches Polynom

$$F(s) = \frac{k \cdot (s - \mu_1)(s - \mu_2) \dots (s - \mu_m)}{(s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \dots (s - \lambda_n)}$$

3.3 Zustandsraumdarstellung

Beispiel: RLC-Reihenschaltung

$$\begin{bmatrix} \dot{i} \\ u_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i \\ u_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ \cdot \end{bmatrix} \cdot u_c$$

$$\dot{\bar{x}} = A \cdot \bar{x} + \bar{b} \cdot u$$

4. Stabilität

4.1 Definition

Ein System wird asymptotisch stabil genannt, falls die homogene Lösung für alle Anfangswerte gegen Null konvergiert.

- Die instabile Pol/Nullstellen-Kürzung ist nicht erlaubt, sie würde ein stabiles System ergeben.
- Pole bezeichnen die Stabilität im Pol/Nullstellen-Schema.
- Rechts der Imaginär-Achse instabil.
- Links der Imaginär-Achse stabil.

4.2 Hurwitzkriterium

Ein Polynom auf Stabilität prüfen, ohne die Polstellen zu berechnen.

$$A(s) = a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_1 \cdot s + a_0 \quad , a_n > 0$$

$$H = \begin{pmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots \\ 0 & a_n & a_{n-2} & \dots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & \dots \\ 0 & 0 & a_n & \dots \end{pmatrix}$$

n Spalten · n Zeilen

$$H_1 = |a_{n-1}|$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

Das Polynom $A(s)$ ist genau dann stabil, wenn die Determinanten aller Hurwitz-Teilmatrizen positiv sind, d.h. wenn $\det(H_1) > 0$, $\det(H_2) > 0$ usw.

5. Dynamische Eigenschaften

Glied	Übertragungsfunktion	Sprungantwort
PT ₁	$F(s) = \frac{k}{T \cdot s + 1} = \frac{\frac{k}{T}}{s + \frac{1}{T}}$	$h(t) = k \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$
PT ₂	$F(s) = \frac{k}{T^2 \cdot s^2 + 2d \cdot T \cdot s + 1}$	$h(t) = k \cdot \left(1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}\right)$

Anfangswertsatz

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s)$$

Endwertsatz

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot F(s)$$

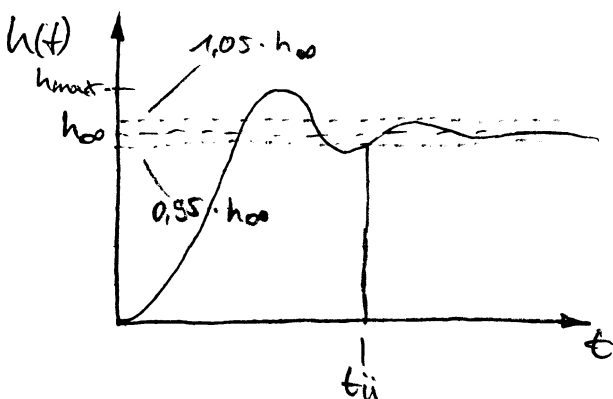
Kann angewendet werden, wenn $s \cdot F(s)$ für $\Re(s) > 0$ keine Polstellen besitzt (ein stabiles System vorliegt).

5.1 Überschwingweite

„Prozent-Angabe“ bezogen auf den Endwert.

$$s_m = \frac{h_{max} - h_{\infty}}{h_{\infty}}$$

Übergangszeit



Übergangszeit $t_{\bar{u}}$ zu dem $h(t)$ endgültig in die 5%-Zone um h_{∞} eintritt.

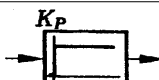
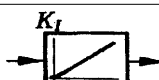
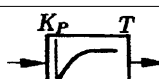
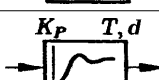
$$0,95 \cdot h_{\infty} \leq h(t) \leq 1,05 \cdot h_{\infty}$$

5.4 Dominante Pole

Ein reeller Pol von $F(s)$ heißt dominant, falls alle weiteren Pole von $F(s)$ „wesentlich“ kleinere Realteile haben und keine Nullstellen in der Nähe liegen.

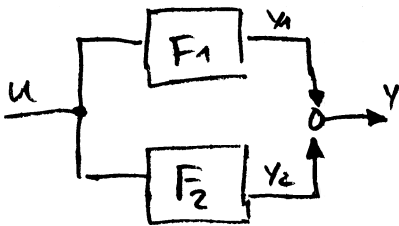
6 Blockschaltbilder

6.1 Lineare Übertragungsglieder

Glied	Blockschaltbild	Funktion
Summierglied		$u_3 = u_1 - u_2$
Verzweigung		$u_1 = u_2 = u_3$
Proportionalglied (P-Glied)		$y(s) = k \cdot u(s)$
Integral-Glied (I-Glied)		$y(s) = \frac{k}{s} \cdot u(s)$
Verzögerungsglied 1. Ordnung (PT ₁ -Glied)		$y(s) = \frac{k}{Ts + 1} \cdot u(s)$
Verzögerungsglied 2. Ordnung (PT ₂ -Glied)		$y(s) = \frac{k}{T^2 \cdot s^2 + 2d \cdot T \cdot s + 1} \cdot u(s)$

6.2 Umformungen

Parallelschaltung

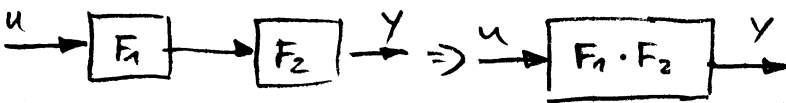


$$y_1 = F_1 \cdot u$$

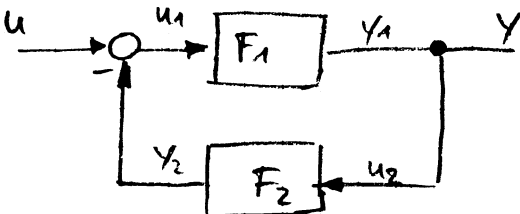
$$y_2 = F_2 \cdot u$$

$$y = y_1 + y_2 = (F_1 + F_2)u$$

Reihenschaltung

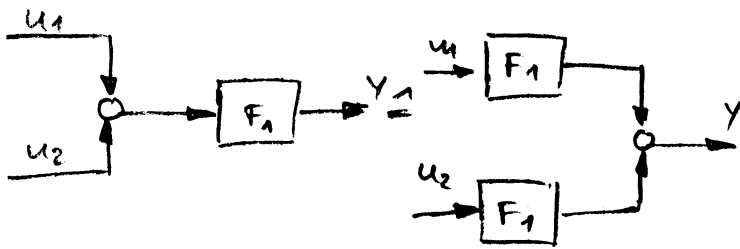


Rückkopplung



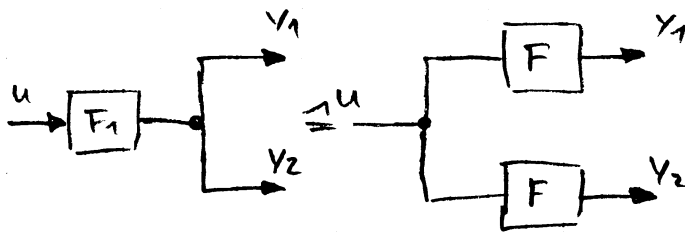
$$F = \frac{u}{y} = \frac{F_1}{1 + F_1 F_2} = \frac{\text{Vorwärts}}{1 + \text{Kreis}}$$

Vertauschen von Summierstellen



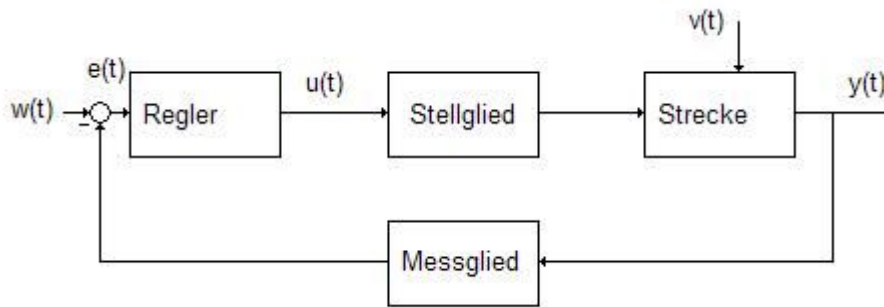
$$y = F_1(u_1 + u_2) \quad \rightarrow \quad y = F_1 u_1 + F_1 u_2$$

Vertauschen von Verzweigungen



$$y_1 = y_2 = F_1 \cdot u \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} y_1 &= F \cdot u \\ y_2 &= F \cdot u \end{aligned}$$

7 Regelkreis



$y =$ Regelgröße
 $w =$ Führungsgröße
 $v =$ Störgröße
 $e =$ Regeldifferenz $= 0$
 $u =$ Reglerausgang

Regler

$$u(s) = F_{Reg}(s) \cdot e(s) = \frac{Z_{Reg}(s)}{N_{Reg}(s)} \cdot e(s)$$

Stellglied

$$z(s) = F_{Stell}(s) \cdot u(s) = \frac{Z_{Stell}(s)}{N_{Stell}(s)} \cdot u(s)$$

Strecke

$$y(s) = F_{Str}(s) \cdot z(s) + F_{Stör} \cdot v(s) = \frac{Z_{Str}(s)}{N_{Str}(s)} \cdot z(s) + \frac{Z_{Stör}}{N_{Stör}} \cdot v(s)$$

Messglied

$$x(s) = F_{Mess}(s) \cdot y(s) = \frac{Z_{Mess}(s)}{N_{Mess}(s)} \cdot y(s)$$

7.1 Übertragungsfunktionen

Charakteristisches Polynom

$$P = N_{Reg} \cdot N_{Stell} \cdot N_{Str} \cdot N_{Mess} + Z_{Reg} \cdot Z_{Stell} \cdot Z_{Str} \cdot Z_{Mess}$$

Führungsübertragungsfunktion

$$G_{wy} = \frac{F_{Reg} \cdot F_{Stell} \cdot F_{Str}}{1 + F_{Reg} \cdot F_{Stell} \cdot F_{Str} \cdot F_{Mess}} = \frac{Z_{Reg} \cdot Z_{Stell} \cdot Z_{Str} \cdot N_{Mess}}{\text{char. Polynom}}$$

Störübertragungsfunktion

$$G_{vy} = \frac{F_{Stör}}{1 + F_{Reg} \cdot F_{Stell} \cdot F_{Str} \cdot F_{Mess}} = \frac{Z_{Stör} \cdot N_{Reg} \cdot N_{Stell} \cdot \frac{N_{Str}}{N_{Stör}} \cdot N_{Mess}}{\text{char. Polynom}}$$

7.2 Stabilität

- Der Regelkreis heißt stabil, falls das char. Polynom stabil ist. Falls dem so ist, sind alle möglichen Übertragungsfunktionen des Regelkreises stabil.
- Stabile Systeme können durch eine Regelung instabil werden.
- Stabilität kann nicht anhand einzelner Übertragungsfunktionen beurteilt werden.

7.4 Vereinfachter Regelkreis

- F_{Str} und F_{Stell} zu F zusammenfassen
- F_{Mess} wird vernachlässigt
- $F_{Stör}$ wird vernachlässigt
- F_{Reg} zu R

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} \quad R(s) = \frac{D(s)}{C(s)}$$

Charakteristisches Polynom

$$P = A(s) \cdot C(s) + B(s) \cdot D(s)$$

Führungsübertragungsfunktion

$$G_{wy}(s) = \frac{B(s) \cdot D(s)}{\text{char. Polynom}}$$

Störübertragungsfunktion

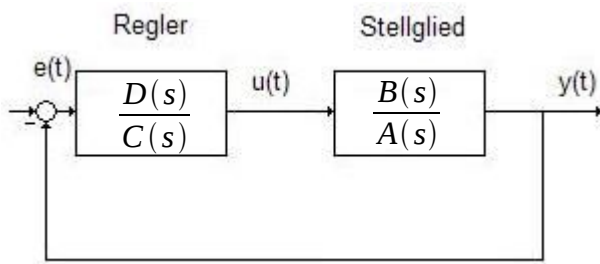
$$G_{vy}(s) = \frac{A(s) \cdot C(s)}{\text{char. Polynom}}$$

Im vereinfachten Regelkreis gilt:

$$G_{wy}(s) + G_{vy}(s) = 1$$

$$h_{wy}(t) + h_{vy}(t) = 1 \quad (\text{Störungssprungantwort})$$

Stationäre Endwerte



$$\underbrace{t \rightarrow \infty}_{\text{Zeitbereich}} = \underbrace{s \rightarrow 0}_{\text{Laplacebereich}}$$

Für den stationären Endwert der Störungssprungantwort gilt:

$$h_E = G_{vy}(0) = \frac{A(0) \cdot C(0)}{P(0)} \quad \text{mit } P(0) \neq 0$$

- wird der Regler so gewählt, dass $C(0)=0$, d.h. Der Regler enthält einen Pol bei $s=0$ und konstante Störungen werden für $t \rightarrow \infty$ ausgeglet.
- Falls die Strecke einen Pol bei $s=0$ besitzt ($A(0)=0$), so folgt $h_E=0$ für beliebige stabilisierende Regler.
- Wenn $h_E=0$ für die Störungssprungantwort gilt, so gilt $h_E=1$ für die Führungssprungantwort, da $G_{wy}(0) + G_{vy}(0) = 1$.
- $h_E=1$ für die Führungssprungantwort bedeutet, dass konstante Führungssignale für $t \rightarrow \infty$ ohne Regelabweichung eingestellt werden (keine konstante Regelabweichung)

7.5 Einfache Reglertypen

$k_p = \text{Regelverstärkung}$

$T_i, T_D = \text{Integrationskonstante}$

P-Regler

$$R(s) = k_p$$

I-Regler

$$R(s) = \frac{1}{T_i \cdot s}$$

PI-Regler

$$R(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} \right) = \frac{k_p \cdot (T_i \cdot s + 1)}{T_i \cdot s}$$

Laplacebereich:
$$y(s) = k_p \cdot \left(u(s) + \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot u(s) \right)$$

Zeitbereich:
$$y(t) = k_p \cdot u(t) + \frac{k_p}{T_i} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau$$

DGL: $\dot{y} = k_p \cdot \dot{u} + \frac{k_p}{T_i} \cdot u$

Sprungantwort: $h(t) = k_p + \frac{k_p}{T_i} \cdot t$

PID-Regler (ideal)

$$R(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + T_D \cdot s \right) = \frac{k_p \cdot (T_D \cdot T_i \cdot s^2 + T_i \cdot s + 1)}{T_i \cdot s}$$

Laplace: $y(s) = k_p \cdot u(s) + \frac{1}{T_i \cdot s} \cdot u(s) + T_D \cdot s \cdot u(s)$

Zeitbereich: $y(t) = k_p \cdot u(t) + \frac{k_p}{T_i} \cdot \int_0^t u(\tau) d\tau + \frac{k_p \cdot T_D \cdot du(t)}{dt}$

Sprungantwort: $h(t) = k_p + \frac{k_p}{T_i} \cdot t + k_p \cdot T_D \cdot \delta(t)$

PID-Regler (real)

$$R(s) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i \cdot s} + \frac{T_D \cdot s}{1 + T_1 \cdot s} \right) = \frac{k_p \cdot (T_i \cdot (T_D + T_1) \cdot s^2 + (T_i + T_1) \cdot s + 1)}{T_i \cdot s \cdot (1 + T_1 \cdot s)}$$

Sprungantwort: $h(t) = k_p \cdot \left(1 + \frac{1}{T_i} \cdot t + \frac{T_D}{T_1} \cdot e^{-\frac{t}{T_1}} \right)$

8. Wurzelortskurve

8.1 Gebietsvorgabe im Laplace-Bereich

$$\tan \beta = \frac{d}{\sqrt{1-d^2}}$$

In der Praxis hat sich gezeigt, dass die Dämpfung für ein „gutes“ Systemverhalten im Bereich von

$$0,1 \leq d \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \approx 6^\circ \leq \beta \leq \approx 45^\circ$$

liegen sollte. Der Wert 0,1 stellt sicher, dass die auftretenden Schwingungen in einer endlichen Zeit abklingen. Der Wert $\frac{1}{\sqrt{2}}$ zeichnet sich durch ein gutes Verhältnis von Überschwingweite zu Einschwingdauer aus.

8.2 Eigenschaften

1. Die n Äste der Wurzelortskurve beginnen für $k=0$ in den Polen des offenen Kreises. Sie enden für $k \rightarrow \infty$ in den Nullstellen des offenen Kreises, wobei $s=\infty$ als $(n-m)$ -fache Nullstelle von $F_o(s)$ aufzufassen ist. $(n-m)$ Äste der Wurzelortskurve streben ins Unendliche.
2. Die Wurzelortskurve ist symmetrisch zur reellen Achse, da die Pole und Nullstellen im Komplexen immer konjugiert komplex auftreten.
3. Wurzelorte auf der reellen Achse liegen für $k > 0$ links von einer ungeraden Anzahl von Polen und Nullstellen. Jeder Pol oder jede Nullstelle wird dabei so oft gezählt, wie ihre Ordnung beträgt (diese Regel betrifft nur Pole und Nullstellen auf der reellen Achsen).
4. Die Asymptoten der ins Unendliche strebenden Wurzelästen schneiden sich sämtlich in einem Punkt der reellen Achse, dem Wurzelschwerpunkt.

$$\delta_\omega = \frac{1}{n-m} \cdot \left(\underbrace{\sum_{i=1}^n \Re(\lambda_i)}_{\text{Realteil der Pole}} - \underbrace{\sum_{i=1}^m \Re(\mu_i)}_{\text{Realteil der Nullstellen}} \right)$$

5. Die Anstiegswinkel der Asymptoten der Wurzelortskurven sind

$$\varphi_i = \frac{(2 \cdot i + 1) \cdot \pi}{n-m}, \quad i=0, 1, \dots, n-m-1$$

6. Ein Pol von $\tilde{F}(s)$ wirkt „abstoßend“ und eine Nullstelle von $\tilde{F}(s)$ wirkt „anziehend“.

7. Zu jedem Punkt auf der Wurzelortskurve gehört ein eindeutiger Wert von k (reell).

$$k = \frac{-1}{F(z)} \quad (1+k \cdot F(z)=0) \text{ charakteristisches Polynom.}$$

8. Die Wurzelortskurve verzweigt sich in den Punkten s_v .

$$N_o \cdot \frac{dZ_o}{ds} - Z_o \cdot \frac{dN_o}{ds} = 0 \quad N_o \text{ und } Z_o \text{ sind Nenner und Zähler von } F_o(s)$$

9. Der Schnittpunkt der Wurzelortskurve mit der imaginären Achse kennzeichnet die Stabilitätsgrenze.

charakteristische Gleichung:

$$1 + F_o(j\omega) = 0$$

$$N_o(j\omega) + Z_o(j\omega) = 0$$

Hieraus lassen sich die kritischen Werte ω_{krit} aus dem Imaginärteil und k_{krit} aus dem Realteil ermitteln.

9. Frequenzgang

9.1 Frequenzantwort

mögliche Testsignale

$$u(t)=1 \quad (\text{Sprungantwort})$$

$$u(t)=\delta(t) \quad (\text{Impulsantwort})$$

$$u(t)=\sin(\omega_0 t) \quad (\text{Frequenzantwort})$$

Definition

Das Ausgangssignal y für das Eingangssignal $y(t)=\sin(\omega_0 t + \varphi)$ wird Frequenzantwort genannt.

$$y(t)=r \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

wobei

$$r=|F(j\omega_0)| : \text{Betrag der komplexen Zahl } F(j\omega_0)$$

$$\varphi=\angle F(j\omega_0) : \text{Phase der komplexen Zahl } F(j\omega_0)$$

Das heißt, die Frequenzantwort eines stabilen Systems auf eine harmonische Schwingung $u(t)=\sin(\omega_0 t)$ besteht für $t \rightarrow \infty$ aus einer harmonischen Schwingung mit

- der selben Frequenz ω ,
- der Phase $\varphi=\angle F(j\omega_0)$
- der Amplitude $r=|F(j\omega_0)|$

Darstellung im Bode-Diagramm

- $\tilde{\omega}=\log \omega$ für die ω -Achse
- $|F|_{dB}=20 \cdot \log|F|$ für die $|F|$ -Achse

Fehler der Zeichnung an Stelle $\omega=\omega_0$ ist $\approx 3\text{dB}$ oder $\approx 9^\circ$ je Pol- und Nullstelle.

9.3 Frequenzkennlinien elementarer Glieder

P-Glied

$$F(s)=k \quad \text{mit } k>0$$

Die Betragskennlinie $|F(j\omega)|$ ist konstant und hat den Wert k_{dB} .

Die Phasenkennlinie $\angle F(j\omega)$ hat den Wert 0.

I-Glied

$$F(s)=\frac{k}{s} \quad \text{mit } k>0$$

$$|F(j\omega)|=\left|\frac{k}{j\omega}\right|=\frac{k}{\omega}$$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{k}{\omega}\right) = \underbrace{20 \cdot \log k}_{k_{dB}} - \underbrace{20 \cdot \log \omega}_{\omega^*}$$

$$\angle F(j\omega) = \angle \frac{k}{j\omega} = \angle -j \frac{k}{\omega} = -90^\circ$$

PT₁-Glieder

$$F(s) = \frac{k}{Ts + 1}, \quad k > 0; T > 0$$

$$F(j\omega) = \frac{k}{T \cdot j\omega + 1}, \quad \omega_0 = \frac{1}{T}$$

Für $\omega \ll \omega_0$ (Frequenz viel kleiner als Grenzfrequenz):

$$|F(j\omega)| = k$$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log k$$

$$\angle F(j\omega) = 0$$

Für $\omega \gg \omega_0$ (Frequenz viel größer als Grenzfrequenz):

$$|F(j\omega)| = \frac{k \cdot \omega_0}{\omega}$$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log k + 20 \cdot \log(\omega_0) - 20 \cdot \log(\omega)$$

$$\angle F(j\omega) = -90^\circ$$

PT₂-Glieder

$$F(s) = \frac{k \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2d\omega_0 s + \omega_0^2}$$

$$|F(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2d \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}}$$

$$|F(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log k - 20 \cdot \log \left(\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \left[2d \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2} \right)$$

Für $\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \rightarrow \sqrt{\dots} = 1$:

$$\sqrt{\dots} = 1$$

$$|F(j\omega)|_{dB} \approx 20 \cdot \log k$$

$$\angle F(j\omega) = 0$$

Für $\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1$:

$$\sqrt{\dots} = \frac{\omega^2}{\omega_0}$$

$$|F(j\omega)|_{dB} \approx 20 \cdot \log k - 20 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \approx 20 \cdot \log k - 40 \cdot \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)$$

$$\angle F(j\omega) = -180^\circ$$

$$\angle F(j\omega) = -\arctan \frac{2d \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}$$

Schnittpunkt der beiden Asymptoten: $\omega = \omega_0$

Maximalwert der Betragskennlinie: $F_{max} = \frac{1}{2d\sqrt{1-d^2}}$, d : Dämpfung

9.4 Rechenregeln

Vielfaches

$$F(s) = k \cdot F_1(s), \quad k > 0$$

Die Betragskennlinie wird um die Verstärkung k_{dB} vertikal verschoben:

$$|F(j\omega)|_{dB} = k_{dB} + 20 \cdot \log |F_1(j\omega)|$$

Die Phasenkennlinie bleibt unverändert:

$$\angle F(j\omega) = \angle F_1(j\omega)$$

Produkte

$$F(s) = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Beträge von Betrag als auch Phase addieren:

$$|F(j\omega)|_{dB} = |F_1(j\omega)|_{dB} + |F_2(j\omega)|_{dB}$$

$$\angle F(j\omega) = \angle F_1(j\omega) + \angle F_2(j\omega)$$

10. Reglereinstellungen im Frequenzbereich

10.1 Offener und geschlossener Regelkreis

- offener Regelkreis: $F_o(s) = R(s) \cdot F(s)$
- geschlossener Regelkreis: $G_{wy}(s) = \frac{R(s) \cdot F(s)}{1 + R(s) \cdot F(s)} = \frac{F_o(s)}{1 + F_o(s)}$

Es gilt:

- ist $|F_o(j\omega)| \gg 1$, so ist $G_{wy}(j\omega) \approx \frac{F_o(j\omega)}{F_o(j\omega)} = 1$
- ist $|F_o(j\omega)| \ll 1$, so ist $G_{wy}(j\omega) = F_o(j\omega) \cdot \frac{1}{F_o(j\omega)} \approx F_o(j\omega)$

Annahme A

Es gibt eine Frequenz $\omega_D > 0$ mit

$$|F_o(j\omega_D)| = 1.$$

Die Durchtrittsfrequenz ω_D lässt sich aus dem Schnittpunkt der Betragskennlinie mit der 0dB-Linie bestimmen.

Annahme B

In der Nähe von ω_D fällt $|F_o(j\omega)|$ um mindestens 20dB/Dekade.

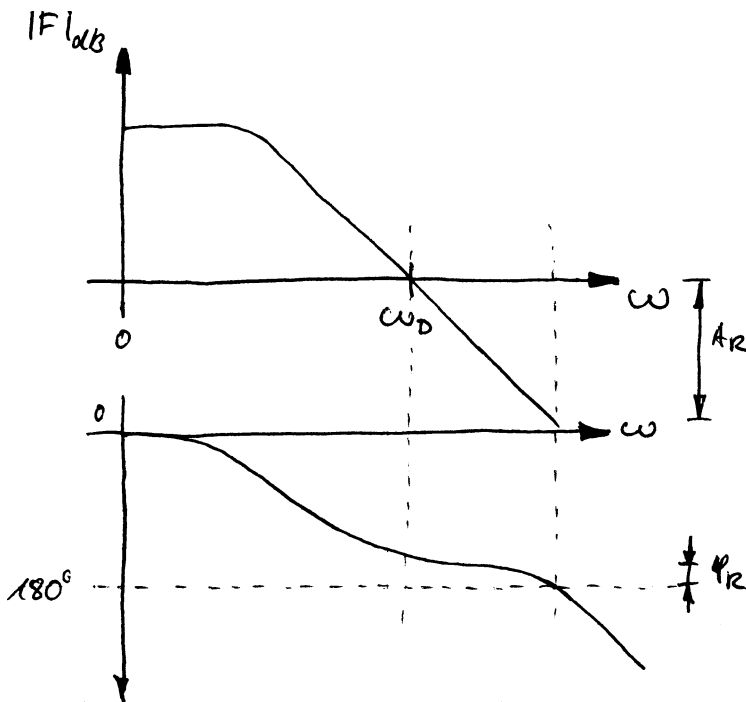
Annahme C

Betrag und Phase von F_o fallen monoton. Für $\omega \ll \omega_D$ ist $|F_o(j\omega)|$ groß und für $\omega \gg \omega_D$ ist $|F_o(j\omega)|$ klein.

Falls die Annahmen A bis C erfüllt sind, so erhält man eine Näherung der Betragskennlinie des geschlossenen Kreises G_{wy} , in dem die Betragskennlinie des offenen Kreises F_o durch die 0dB-Linie abgeschnitten wird.

Die Phasenkennlinie von G_{wy} ist gleich der Phasenkennlinie des offenen Kreises $F_o(j\omega)$ für $\omega \gg \omega_D$ und gleich Null für $\omega \ll \omega_D$.

Amplituden- und Phasenreserve



φ_R : Phasenreserve

A_R : Amplitudenreserve

ω_D : Durchtrittsfrequenz
($|F_O|_{dB}=0$ bzw $|F_O|=1$)

$\varphi_R = 180^\circ - \varphi_0(\omega_D)$

- Der Regelkreis ist stabil, wenn die Phasenreserve $\varphi_R > 0$ ist.
- Die Phasenreserve φ_R sollte möglichst groß sein, damit die Sprungantwort wenig überschwingt.
- Die Durchtrittsfrequenz ω_D sollte möglichst groß sein, damit der Regelkreis schnell einschwingt.

Für eine gut eingestellte Regelung werden folgende Werte empfohlen:

- für ein gutes Führungsverhalten: $\varphi_R = 40^\circ - 70^\circ$ (wenig Überschwingen, schnell)
- für ein gutes Störübertragungsverhalten: $\varphi_R = 20^\circ - 50^\circ$ (gute Störunterdrückung)

10.2 Auslegung von P-Reglern

$$F_O(s) = k \cdot F(s)$$

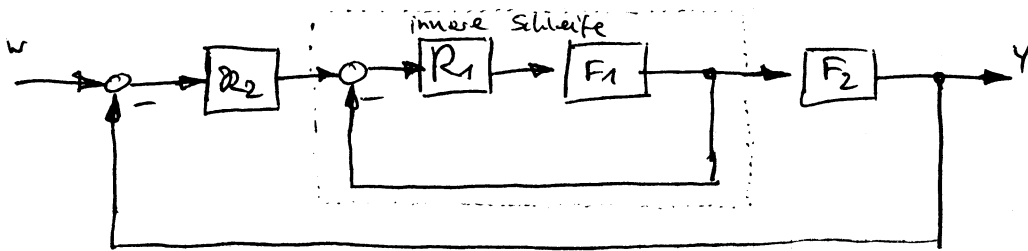
- Die Betragskennlinie wird vertikal um k_{dB} verschoben und die Phasenkennlinie bleibt unverändert.

10.3 Auslegung von PI- und PID-Reglern

- PI- und PID-Regler werden wie beim Wurzelortskurvenverfahren in einen „dynamischen Teil“ und in eine Verstärkung zerlegt.
- Die Festlegung der Zeitkonstanten erfolgt nach den selben Vorgaben wie beim Wurzelortskurvenverfahren.
- Die Verstärkung entspricht der Auslegung des P-Reglers.

11 Erweiterte Regelungsstrukturen

11.1 Kaskadenregelung



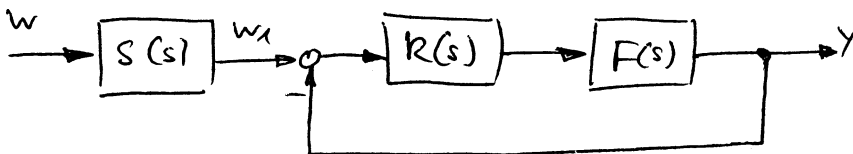
Innerer Kreis ist schneller (elektrisch, am besten aus P-Regler), äußerer Kreis ist langsamer (mechanisch)

1. Bestimme R_1 so, dass die innere Schleife möglichst schnell und gut gedämpft ist. Stationäre Genauigkeit ist nicht unbedingt erforderlich (I-Anteil).
2. Fasse das Ergebnis der inneren Schleife und F_2 zusammen:

$$\tilde{F} = F_2 \cdot \underbrace{\frac{R_1 \cdot F_1}{1 + R_1 \cdot F_1}}_{\text{innere Schleife}}$$

3. Bestimme den Regler R_2 .

11.2 Vorsteuerung



Durch die Vorsteuerung kann eine beliebige Führungsantwort erreicht werden.

$$G_{wy} = S \cdot \frac{R \cdot F}{1 + R \cdot F} \quad \text{mit } S = \text{Vorsteuerungsübertragung}$$

12 Einstellregeln

12.1 Betragsoptimum

Die Strecke $F(s)$ muss von der Form

$$F(s) = \frac{k}{s \cdot (T \cdot s + 1)}$$

sein.

Wir verwenden einen P-Regler der Form

$$R(s) = \frac{1}{2k \cdot T}$$

Für den geschlossenen Regelkreis ergibt sich

$$G_{wy} = \frac{1}{2T^2 s^2 + 2T s + 1}$$

Dies ist ein PT_2 -Glied mit den Polen

$$\lambda_{1/2} = \frac{-1 \pm j}{2T} \rightarrow \frac{|\Im(\lambda_i)|}{|\Re(\lambda_i)|}$$

Dies entspricht der Dämpfungsgeraden $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Der Name „Betragsoptimum“ wurde gewählt, da die Betragskennlinie im Frequenzbereich über einen großen Bereich = 1 ist.

Kompliziertere Regler werden in einen „dynamischen Teil“ und eine Verstärkung aufgeteilt.

$$R(s) = k_p \cdot \tilde{R}(s)$$

Der „dynamische Teil“ $\tilde{R}(s)$ und $F(s)$ müssen wie folgt beschaffen sein:

$$\tilde{R}(s) \cdot F(s) = \frac{k}{s(Ts+1)}$$

dann ist die obige Regel anwendbar.

<i>Regelstrecke</i>	<i>Regler</i>	<i>Regler-Typ</i>
$\frac{k}{s(Ts+1)}$	$\frac{1}{2k \cdot T}$	P
$\frac{k}{(T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1)}$ mit $T_1 > T_2 > 0$	$\frac{T_1}{2k \cdot T_2} \cdot \left(\frac{T_1 s + 1}{T_1 \cdot s} \right)$	PI

12.2 Symmetrisches Optimum

Das „symmetrische Optimum“ liefert Einstellregeln für Regler in antriebstechnischen Regelkreisen.

Die Strecke $F(s)$ zeichnet sich durch eine Gruppe „großer Zeitkonstanten“ und eine Gruppe „kleiner Zeitkonstanten“ aus.

$$F(s) = \frac{k_{PS}}{(T_1 s + 1) \cdot (T_2 s + 1) \cdot \prod_{\mu} (1 + t_{\mu} \cdot s)}$$

oder

$$F(s) = \frac{k_{IS}}{s \cdot (1 + T_2 \cdot s) \cdot \prod_{\mu} (1 + t_{\mu} \cdot s)}$$

wobei T_1, T_2 „große“ Zeitkonstanten und t_{μ} die „kleinen“ Zeitkonstanten sind.

Für die vielen „kleinen“ PT₁-Glieder wird ein Ersatz-PT₁-Glied mit $T_{\sigma} = \sum_{\mu} t_{\mu}$ gebildet:

$$\frac{1}{1 + T_1^* s} \cdot \frac{1}{1 + T_2^* s} \cdot \frac{1}{1 + T_3^* s} \cdot \dots \approx \frac{1}{1 + T_{\sigma} s}$$

Je nach Struktur der Regelstrecke werden entweder PI oder PI-PD-Regler eingesetzt. Die Kennwerte ergeben sich aus der Tabelle: ($p \hat{=} s$)

Typ	Regelstrecke Übertragungsfunktion	Typ	Regler Übertragungsfunktion	Einstellung der Kennwerte		
				K_{PR}	T_n	T_v
P-T _n	$F_S(p) = \frac{K_{PS}}{(1 + T_1 p) \cdot \prod_{\mu} (1 + t_{\mu} p)}$ mit $T_1 > 4T_{\sigma}$; $T_{\sigma} = \sum_{\mu} t_{\mu}$	PI	$F_R(p) = K_{PR} \cdot (1 + \frac{1}{T_n p})$	$\frac{T_1}{2K_{PS}T_{\sigma}}$	$4T_{\sigma}$	-
I-T _n	$F_S(p) = \frac{K_{IS}}{p \cdot \prod_{\mu} (1 + t_{\mu} p)}$			$\frac{1}{2K_{IS}T_{\sigma}}$	$4T_{\sigma}$	-
P-T _n	$F_S(p) = \frac{K_{PS}}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p) \cdot \prod_{\mu} (1 + t_{\mu} p)}$ mit $T_1 > 4T_{\sigma}$; $T_1 > T_2 > T_{\sigma}$	PI-PD	$F_R(p) = K_{PR}(1 + \frac{1}{T_n p})(1 + T_v p)$	$\frac{T_1}{2K_{PS}T_{\sigma}}$	$4T_{\sigma}$	T_2
I-T _n	$F_S(p) = \frac{K_{IS}}{p(1 + T_2 p) \cdot \prod_{\mu} (1 + t_{\mu} p)}$ mit $T_2 > T_{\sigma}$			$\frac{1}{2K_{IS}T_{\sigma}}$	$4T_{\sigma}$	T_2

Quelle: ?

13 Anhang

13.1 Laplace-Korrespondenzen

Originalfunktion	Bildfunktion
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
t	$\frac{1}{p^2}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$
e^{-at}	$\frac{1}{p+a}$
$t \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^2}$
$t^n \cdot e^{-at}$	$\frac{n!}{(p+a)^{n+1}}$
$\frac{1}{(n-1)!} \cdot t^{n-1} \cdot e^{-at}$	$\frac{1}{(p+a)^n}$
$\frac{1}{a} \cdot \sin at$	$\frac{1}{p^2 + a^2}$
$\frac{1}{a} \cdot \sinh at$	$\frac{1}{p^2 - a^2}$
$\cos at$	$\frac{p}{p^2 + a^2}$
$\cosh at$	$\frac{p}{p^2 - a^2}$
$\frac{1}{a} \cdot e^{-bt} \cdot \sin at$	$\frac{1}{(p+b)^2 + a^2}$
$e^{-bt} \cdot \cos at$	$\frac{p+b}{(p+b)^2 + a^2}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \cdot e^{-\zeta \omega_n t} \cdot \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} \cdot t)$	$\frac{1}{p^2 + 2\zeta \omega_n p + \omega_n^2} \quad \zeta < 1$

Quelle: ?

13.2 Laplace-Rechenregeln

Satz	Originalfunktion	Bildfunktion
Linearitätssatz	$K \cdot f(t)$	$K \cdot F(p)$
	$f_1(t) + f_2(t)$	$F_1(p) + F_2(p)$
Verschiebungssatz	$f(t - a) \quad t > a \geq 0$	$e^{-ap} \cdot F(p)$
Dämpfungssatz	$e^{-at} \cdot f(t)$	$F(p + a)$
Ähnlichkeitssatz	$f(at) \quad a > 0$	$\frac{1}{a} \cdot F\left(\frac{p}{a}\right)$
Differentiationsatz	$\frac{df(t)}{dt}$	$p \cdot F(p) - f(+0)$
	$\frac{d^n f(t)}{dt^n}$	$p^n \cdot F(p) - p^{n-1} \cdot f(+0) - p^{n-2} \cdot f'(+0) - \dots -$ $- p \cdot f^{(n-2)}(+0) - f^{(n-1)}(+0)$
Differentiationsatz für die Bildfunktion	$(-t)^n \cdot f(t)$	$\frac{d^n F(p)}{dp^n}$
Integrationsatz	$\int_0^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{p} \cdot F(p)$
Integrationsatz für die Bildfunktion	$\frac{f(t)}{t}$	$\int_p^\infty F(\rho) d\rho$
Faltungssatz	$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) \cdot f_2(t - \tau) d\tau$	$F_1(p) \cdot F_2(p)$
Faltungssatz für die Bildfunktion	$f_1(t) \cdot f_2(t)$	$F_1(p) * F_2(p) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\rho) \cdot F_2(p - \rho) d\rho$

Quelle: ?