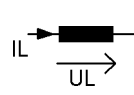


Formelsammlung Signale & Systeme (ET054)

DGL

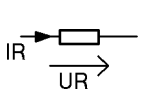
Masche(n) aufstellen und nur Abhängigkeiten zur Ausgangsgröße übrig lassen.



$$i(t) = \frac{1}{L} \int u(t) dt$$


$$u(t) = L \cdot \dot{i}(t)$$

Bauelemente



$$i(t) = \frac{u(t)}{R}$$

$$u(t) = i(t) \cdot R$$



$$i(t) = c \cdot \dot{u}(t)$$

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

Allgemein

$$a_0 y(t) + a_1 \dot{y}(t) + a_2 \ddot{y}(t) + \dots + a_n y^{(n)}(t)$$

$$= b_0 x(t) + b_1 \dot{x}(t) + b_2 \ddot{x}(t) + \dots + b_n x^{(n)}(t)$$

DGL Beispiele

RC-Tiefpass

$$x(t) = u_{Ein}(t); y(t) = u_C(t)$$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = x(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

RC-Hochpass

$$x(t) = u_{Ein}(t); y(t) = u_R(t)$$

$$\dot{y}(t) + \frac{1}{RC} y(t) = \dot{x}(t)$$

$$H(s) = \frac{s}{s + \frac{1}{RC}}$$

RL-Tiefpass

$$x(t) = u_{Ein}(t); y(t) = u_R(t)$$

$$\frac{L}{R} \dot{y}(t) + y(t) = x(t)$$

$$H(s) = \frac{1}{s \frac{L}{R} + 1}$$

RL-Hochpass

$$x(t) = u_{Ein}(t); y(t) = u_L(t)$$

$$\dot{y}(t) + \frac{R}{L} y(t) = \dot{x}(t)$$

$$H(s) = \frac{s}{\frac{R}{L} + s}$$

RLC-Reihen-Schwingkreis

$$x(t) = u_{Ein}(t); y(t) = u_L(t)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{R}{L} \dot{y}(t) + \frac{1}{LC} y(t) = \ddot{x}(t)$$

$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + s \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}}$$

RLC-Parallel-Schwingkreis

$$x(t) = i_{ges}(t); y(t) = u(t)$$

$$C \ddot{y}(t) + \frac{1}{R} \dot{y}(t) + \frac{1}{L} y(t) = \dot{x}(t)$$

$$H(s) = \frac{s}{s^2 C + s \frac{1}{R} + \frac{1}{L}}$$

Laplace-Transformation

$$a f(t) \rightarrow a F(s)$$

$$\dot{f}(t) \rightarrow s F(s) - f(0)$$

$$\ddot{f}(t) \rightarrow s^2 F(s) - s f(0) - \dot{f}(0)$$

Allgemein

$$f^{(n)}(t) \rightarrow s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) s^{n-k-1}$$

$$a_0 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_2 s^2 Y(s) + \dots + a_n s^n Y(s) = b_0 X(s) + b_1 s X(s) + b_2 s^2 X(s) + \dots + b_n s^n X(s)$$

Übertragungsfunktion

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_n s^n}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_n s^n}$$

Fourier-Transformation

Die Fourier-Transformierte entspricht der von Laplace multipliziert mit $e^{-\sigma t}$. Sie ist damit gleich der Laplace-Transformierten, ausgewertet auf der imaginären Achse (LT: $s = \sigma + j\omega$; FT: $\sigma = 0$).

Zusammenhang

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t) \cdot e^{-\sigma t}] \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Komplexe Form der Fourier-Reihe

(periodische Signale \rightarrow diskretes Linienspektrum)

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{jk\omega t}$$

$$\text{mit } c_k = \frac{1}{T_0} \int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(t) \cdot e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$(c = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$$

Linearitätssatz

Superposition ist möglich.

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \rightarrow a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$$

Verschiebungssatz

$$\text{Zeitbereich: } f(t-T) \rightarrow F(s) \cdot e^{-sT}$$

$$\text{Bildbereich: } f(t) \cdot e^{-St} \rightarrow F(s+S)$$

Ähnlichkeitssatz

$$f(at) \rightarrow \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right) \quad (a > 0)$$

Faltungssatz

$$f_1(t) * f_2(t) \rightarrow F_1(s) \cdot F_2(s)$$

Fourier-Transformation

(nichtperiodische Signale \rightarrow kontinuierliches Spektrum)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Verschiebung

Betrag des Spektrums bleibt gleich, aber zusätzliche Phasendrehung entsteht \rightarrow Zeitfunktion wird komplex.

Beispiel: Verschiebung w :

$$X(j\omega - w) \rightarrow x(t) \cdot e^{j\omega t}$$

Pol-Nullstellen-Schema

Zähler und Nenner von $H(s)$ sind in Polynomform darstellbar:

$$H(s) = \frac{b_m \cdot (s - s_{N1})(s - s_{N2}) \dots (s - s_{Nm})}{a_n \cdot (s - s_{P1})(s - s_{P2}) \dots (s - s_{Pn})}$$

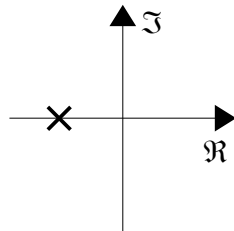
$$= \frac{b_m \cdot \prod_{i=1}^m (s - s_{Ni})}{a_n \cdot \prod_{i=1}^n (s - s_{Pi})}$$

s_{Ni} : komplexe Koord. der Nullstellen

s_{Pi} : komplexe Koord. der Polstellen

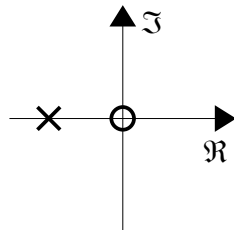
Tiefpass

Soll auch tiefe Frequenzen ($\omega=0$) durchlassen (keine Nullstelle bei $s=0$), hohe werden hingegen gedämpft. $n > m$.



Hochpass

Tiefe Frequenzen, insbesondere $\omega=0$, sollen gesperrt werden. Deswegen eine Nullstelle bei $s=0$. Hohe Frequenzen werden durchgelassen: $n = m$.



LTI-Systeme

Ändert nur Amplitude und Phase der Eingangssignale. Im Ausgangssignal können also nur Frequenzen enthalten sein, die ebenfalls in den Eingangssignalen enthalten sind.

Beschreibung (statisch)

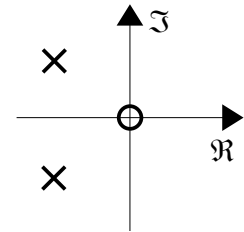
Mit algebraischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten. Enthalten keine Energiespeicher wie Induktivitäten oder Kondensatoren.

Beschreibung (dynamisch)

- lineare DGL mit reellen Koeffizienten

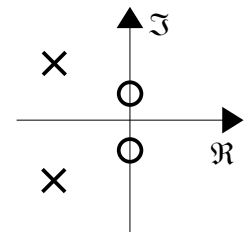
Bandpass

Entsteht aus einer Tiefpass durch Frequenzverschiebung, d.h. der Durchlassbereich wird in Richtung höherer Frequenzen verschoben. Reale Systeme haben konj. kompl. Frequenzganze, weswegen das Schema symmetrisch zur \Re -Achse ist. $n > m$



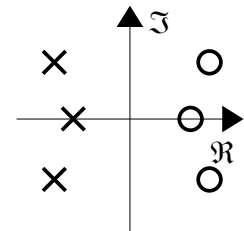
Bandsperr

Bei Sperrfrequenz tritt mind. eine Nullstelle auf. Hohe werden durchgelassen, darum $n = m$.



Allpass

Der Amplitudengang soll konstant sein und lediglich die Phase gedreht werden. Die Beträge, nicht die Stellen selbst, der Null- und Polstellen müssen sich als paarweise kürzen.



- Laplace Bildbereich $H(s)$
- Fourier Frequenzbereich $H(j\omega)$
- Impulsantwort $h(t)$

Eigenschaften

- Gedächtnis: hängt $y(t)$ auch von vorherigen Werten von $x(t)$ ab?
- Kausalität: $y(t)$ reagiert erst auf $x(t)$
- Linearität: erlaubt sind Integration, Differentiation, Integral-Transformationen, Addition, Verzögerung, Multiplikation mit einer Konstanten (nicht Funktion!)
- Zeitvarianz (mit Superposition prüfen!)
- Stabilität: BIBO

Bodediagramm

Graphische Darstellung des Frequenzganges eines Systems, das hier aus sechs Grundbausteinen zusammengesetzt wird.

1. DGL aufstellen
2. Laplace transformieren
3. Übertragungsfunktion: $H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$
4. Frequenzgang: $s \rightarrow j\omega$
5. Konjugiert komplex erweitern um $\Im\{H(j\omega)\}$ und $\Re\{H(j\omega)\}$ zu erhalten

Beispiel:

$$H(s) = \frac{1}{s+10} \rightarrow H(j\omega) = \frac{1}{(j\omega+10)}$$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= \frac{1}{(j\omega+10)} \cdot \frac{(10-j\omega)}{(10-j\omega)} \\ &= \underbrace{\frac{10}{100+\omega^2}}_{\Re} + j \underbrace{\frac{\omega}{100+\omega^2}}_{\Im} \end{aligned}$$

Amplitudengang

$$|H(j\omega)| = \sqrt{\Re^2 + \Im^2}$$

Konzept:

- Eckfrequenzen einzeichnen
- $j\omega=0$
 - kein Pol/keine Nullstelle: Steigung 0
 - Pol: Steigung -20dB/Dekade
 - Nullstelle: Steigung 20dB/Dekade
- mehrfache Pole/Nullstelle → mehrfache Steigung
- gerade Linie bis zur Eckfrequenz
- jeder weitere Pol: Steigung um 20dB/Dekade verringern
- jede weitere Nullstelle: Steigung um 20dB/Dekade erhöhen
- Ecken um $\pm 3\text{dB}$ (oder Vielfachen davon) abrunden

Phasengang

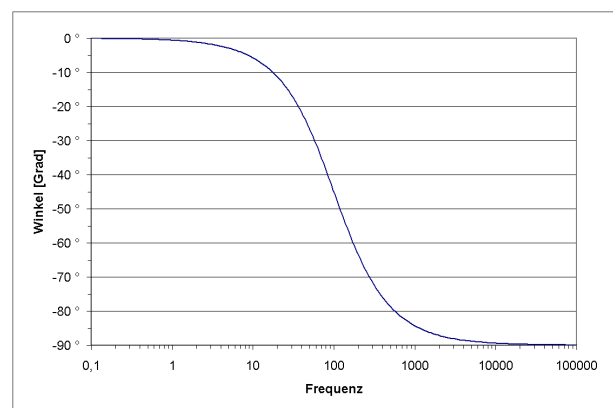
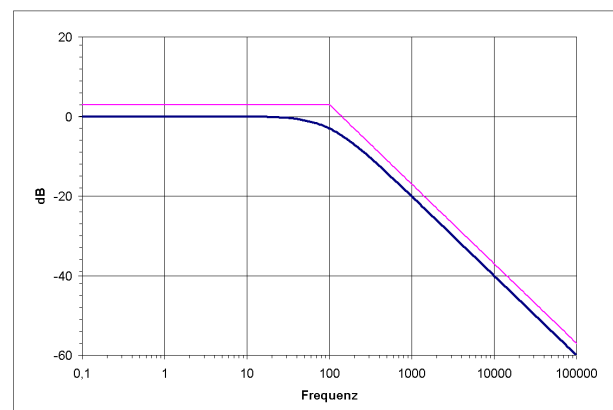
$$\arg\{H(j\omega)\} = -\arctan\left(\frac{\Im\{H(j\omega)\}}{\Re\{H(j\omega)\}}\right)$$

Konzept:

- Eckfrequenzen einzeichnen
- $j\omega=0$
 - kein Pol/keine Nullstelle: Phase 0
 - Pol: Phase -90°
 - Nullstelle: Phase $+90^\circ$
- mehrfache Pole/Nullstelle → mehrfachen Phasenwinkel
- gerade Linie bis $0,1 \cdot$ Eckfrequenz
- jeder Pol subtrahiert 90° , jede Nullstelle addiert 90° über den Bereich $(0,1 \text{ bis } 10) \cdot$ Eckfrequenz
- Ecken um 6° (oder Vielfachen davon) abrunden

Beispiele

Die Eckfrequenz stimmt nicht mit dem Beispiel oben überein!



(Bilder: wikimedia.org)

Digitale Signale

Shannon'sche Abtasttheorem

$$f_a \geq f_{max}$$

Abtastung

Multiplikation mit Diracstossfolge.

$$x_a(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

T : Abtast-Periodendauer

Quantisierung

Bei der A/D-Wandlung ergeben sich Abtastwerte mit endlicher Genauigkeit um diese mit definierter Wortlänge (z.B. 16 Bit) speichern zu können.

Spektrum

Wiederholt sich periodisch mit der Abtastfrequenz f_a auf der Frequenzachse (wird mit Tiefpässen nach der D/A-Wandlung weggefiltert).

$$X_a(f) = \frac{1}{T_a} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(f - k f_a)$$

LTD-Systeme

Diskrete Faltung

Das Ausgangssignal ergibt sich aus einer Faltung der diskreten Impulsantwort mit dem Eingangssignal.

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} m[m] \cdot h[n-m]$$

Entspricht im Grunde der Multiplikation zweier Signale.

Differenzgleichung

Analog zur Differentialgleichung bei zeitkontinuierlichen Systemen.

$$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + \dots + b_k x[n-k] - (a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + \dots + a_n y[n-k])$$

Aliasing

Wird das Abtasttheorem nicht erfüllt, so kommt es zur Überlappung der sich periodisch wiederholenden Frequenzbänder.

FTA

$$X_a(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[nT_a] \cdot e^{-j2\pi f nT_a}$$

Spektrum ist periodisch und kontinuierlich.

IFTA

$$x[nT_a] = \frac{T}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} X_a(f) \cdot e^{-j2\pi f nT_a} df$$

Z-Transformation

Entsprechend der Laplace-Transformation zeitkontinuierlicher Systeme.

$$H(z) = \frac{\sum_{i=0}^k b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^k a_i z^{-i}}$$