Formelsammlung Mathematik (ET053)

Änderungshistorie

07.11.2006	Differenzialgleichungen, Ordnung, Separierbarkeit, Homogenität, Linearität, Lösungen, Lösungsansatz „Trennen der Variablen“, Lösungsansatz „Substitution“, Lineare DGL 1. Ordnung, Tabelle der Lösungsansätze
12.11.2006	Lineare DGL n-ter Ordnung, Wronski-Determinante, Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Tabelle spezieller Laplace-Transformationen
13.11.2006	Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Laplace-Transformation (Linearität)
14.11.2006	Laplace-Transformation (Ähnlichkeitssatz, Verschiebungssatz, Dämpfungssatz, Faltungssatz, Differentiationssatz, Multiplikationssatz, Integrationssatz)
18.11.2006	Laplace-Transformation (Divisionssatz)
22.11.2006	Laplace-Transformation (Grenzwertsätze)
26.11.2006	Spezielle Laplace-Transformationen (Sprungfunktion, Rechteckimpult, periodische Funktion), Anwendung der Laplace-Transformation (1. und 2. Ordnung, Systeme)

Inhalt

Änderungshistorie....1
Inhalt....2
Differenzialgleichungen (DGLn)....3
DGL Lösungsansatz: Trennen der Variablen....4
DGL Lösungsansatz: Substitution....4
Lineare DGL 1. Ordnung....6
Lineare DGL n-ter Ordnung....7
Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten....8
Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten....9
Lösungsansätze für inhomogene DGL....10
Laplace Transformation....11
Spezielle Laplace Transformationen....14
Anwendung. der Laplace-Transf. (lin. DGL mit const. Koeffizienten)....15
Tabelle spezieller Laplace-Transformationen....18

Differenzialgleichungen (DGLn)

Gleichungen, die Funktionen und deren Ableitungen enthalten. Gesucht wird die Funktion y, die mit ihren Ableitungen der Gleichung genügt.

Ordnung

Die Ordnung einer DGL wird durch die höchste vorkommende Ableitung bestimmt.

Beispiel: $y'''(x)+5y'(x)-1=0$ (dritte Ordnung)

Linearität

Eine DGL ist dann linear, wenn Funktionen und Ableitungen nur in erster Potenz vorkommen.

Beispiel: $y'(x)-y(x)=3$

Homogenität

Enthält eine DGL kein(e) von y und dessen Ableitungen freie(s) Störglied/Störfunktion, so wird ist sie homogen.

Beispiel: $y'(x)-2y(x)=0$

Separierbarkeit

Ist dann gegeben, wenn sich die Gleichung in der Form $y'(x)=f(x)\cdot g(y(x))$ ausdrücken lässt.

Beispiele:

separierbar: $y'(x)=\sin(x)\cdot x^2$, $y'(x)\cdot\sin(x)-y\cdot\cos(x)=0$
nicht separierbar: $y'(x)=2x+y$

Lösungen

1. **Allgemeine** sind nur von n unabhängigen Parametern abhängig: $y(x)=y(x, c_{1,} \ldots, c_n)$
2. **Spezielle** gehen aus der Allgemeinen hervor. Durch Einbeziehung von Anfangswerten oder Randbedingungen nehmen die Konstanten spezielle Werte an.
3. **Singuläre** sind nicht in der Allgemeinen enthalten, sind aber dennoch korrekt.

Beispiel: $y'''(t)=6t$

$y'(t)=\int y''(t)=3t^2+c_1$

$y(t)=\int y'(t)=t^3+c_1 t+c_2$ allg. Lösung

Anfangs-/Randbedingungen in allg. Lösung einsetzen:
$y(0)=1 \quad \rightarrow c_2=1$
$y'(0)=0 \quad \rightarrow c_1=0$

Spezielle Lösung: $y(t)=t^3+1$

DGL Lösungsansatz: Trennen der Variablen

Dieser Ansatz wird verwendet, um separierbare DGLn erster Ordnung zu lösen. Hierbei werden die x und $y(x)$ getrennt integriert.

Vorgehensweise

1. Schreiben der DGL $y'(x)=f(x)\cdot g(y(x))$ in der Form $\frac{dy}{dx}=f(x)\cdot g(y)$
2. $\frac{dy}{g(y)}=f(x)dx$,falls $g(y)\neq 0$
3. $\int \frac{1}{g(y)}\,dy=\int f(x)dx$
4. $G(y)=F(x)+c$
5. Auflösen nach y, falls möglich

Beispiel:

$y'=\frac{1}{x}\cdot y \quad (0<x, c<\infty)$ Anfangsbedingung: $y(1)=2$

allgemeine Lösung:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}\cdot y \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{y}dy=\frac{1}{x}dx \;\Leftrightarrow\; \int\frac{1}{y}dy=\int\frac{1}{x}dx \;\Leftrightarrow\; \ln(y)=\ln(x)+c$$
$$\Leftrightarrow y=e^{\ln(x)+c} \;=\; e^{\ln(x)}\cdot e^{c} \;=\; \boldsymbol{x\cdot c_1}$$

spezielle Lösung (einsetzen der Anfangsbedingung):

$$2\overset{!}{=}1\cdot c_1 \;\Leftrightarrow\; c_1=2$$
$$\boldsymbol{y(x)=2x}$$

DGL Lösungsansatz: Substitution

Bestimmte Typen lassen sich so in eine separierbare DGL überführen, die dann mit Hilfe der Trennung der Variablen zu lösen ist.

Typ 1: $y'=f\left(\frac{x}{y}\right)$

1. Substituieren
   $$u(x):=\frac{y(x)}{x} \;\Rightarrow\; y(x)=x\cdot u(x)$$
   $$y'(x)=u(x)\cdot x\cdot u'(x)$$
2. DGL lautet nun
   $$u\cdot x\cdot u'=f(u) \;\Leftrightarrow\; x\cdot u'=f(u)-u \;\Leftrightarrow\; u'=\frac{f(u)-u}{x}$$
3. Lösung durch „Trennung der Variablen“
4. Resubstituieren und auflösen nach y, falls möglich

Beispiel: $y' = \frac{x+4y}{x} \quad (x \neq 0)$

$\Leftrightarrow \quad y' = 1 + 4\frac{y}{x}$

Substituieren: $u = \frac{y}{x}$

$\Rightarrow \quad u + x \cdot u' = 1 + 4u \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot u' = 1 + 3u \quad \Leftrightarrow \quad u' = \frac{1+3u}{x}$

„Trennen der Variablen": $\int \frac{1}{1+3u} du = \int \frac{1}{x} dx$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{3} \ln|1+3u| = \ln|x| + c \quad \Leftrightarrow \quad \ln|1+3u| = \ln|x^3| + c \quad \Leftrightarrow \quad 1+3u = x^3 + c \quad \Leftrightarrow \quad u = c \cdot x^3 - \frac{1}{3}$

Resubstituieren: $y = u \cdot x$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y(x) = c \cdot x^4 - \frac{1}{3}x}$

Typ 2: $\boldsymbol{y' = f(ax + by + c)}$

1. Substituieren: $u(x) = ax + by + c \quad \Rightarrow \quad u'(x) = a + by'(x) = a + b \cdot f(u)$
2. DGL lautet nun
   $u'(x) = a + b \cdot f(u)$
3. Lösung durch „Trennung der Variablen"
4. Resubstituieren und auflösen nach y, falls möglich

Beispiel: $y' = (8\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 1)^2$

Substituieren: $u = 8\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 1$

$\Rightarrow \quad u' = 8 + 2\mathrm{y}' \;=\; 8 + 2u^2$

„Trennen der Variablen": $\frac{du}{dx} = 8 + 2u^2 \quad \Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{8+2u^2} du = \int dx$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \arctan\left(\frac{u}{2}\right) = x + c \quad \Leftrightarrow \quad \arctan\left(\frac{u}{2}\right) = 4x + c \quad \Leftrightarrow \quad u = 2\tan(4\mathrm{x} + c)$

Resubstituieren: $u = 8\mathrm{x} + 2\mathrm{y} + 1$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y(x) = \tan(4x + c) - 4x - \frac{1}{2}}$

Lineare DGL 1. Ordnung

$y' + p(x) \cdot y = q(x)$

- y wird gesucht, y' ist die erste Ableitung
- $p(x)$ bzw. c ist der Koeffizient (bekannt)
- $q(x)$ ist die Störfunktion/das Störglied (bekannt) und bei homogenen DGLn Null

$y = 0$ ist stets eine, die triviale, Lösung

Homogene Lösung

allgemein: $y_h(x) = c \cdot e^{-P(x)}$, P(x) ist die Stammfunktion von p(x)

Beispiel: $y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0$

$$y_h(x) = c \cdot e^{-\ln|x|} = c \cdot e^{\ln\left(\frac{1}{|x|}\right)} = c \cdot \frac{1}{x}$$

Inhomogene Lösung

allgemein: $y(x) = \int q(x) e^{P(x)} dx \cdot e^{-P(x)}$, P(x) ist die Stammfunktion von p(x)
Da $P(x)$ zweimal Verwendung findet, sucht man normalerweise erst die homogene Lösung.

Beispiel: $y' + \tan(x) \cdot y = \sin(x) \cdot \cos(x) \quad \wedge y(0) = 1$

$- y_h(x) = c \cdot e^{\ln|\cos(x)|} = c \cdot \cos(x)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad y(x) &= \int \sin(x) \cdot \cos(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)} dx \cdot \cos(x) \\
&= \int \sin(x)\, dx \cdot \cos(x) \\
&= (-\cos(x) + c) \cdot \cos(x) \\
&= -\cos^2(x) + c \cdot \cos(x)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad y(0) \overset{!}{=} 1 \iff -1 + c = 1 \iff c = 2$

$\Rightarrow \quad y_s(x) = -\cos^2(x) + 2 \cdot \cos(x)$

Lineare DGL n-ter Ordnung

$$\underbrace{a_n(x)\cdot y^{(n)}+a_{n-1}(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+a_1(x)\cdot y'+a_0(x)\cdot y}_{=:\,L[y]}=f(x)$$

Eingenschaften von $L[y]$:

1) $L[y_1+y_2]=L[y_1]+L[y_2]$
2) $L[\lambda\cdot y]=\lambda\cdot L[y] \quad ,\lambda\in\mathbb{R}$

Homogene Lösung

$$y_h(x)=c_1 y_1(x)+\ldots+c_n y_n(x) \quad ,c_{1,}\ldots,c_2\in\mathbb{R}$$

$y_{1,}\ldots,y_n$ sind linear unabhängige Lösungen von $L[y]=0$ (siehe Wronski-Determinante).

Wronski-Determinante

Die Lösungsmenge einer homogenen DGL ist ein n -dimensionaler Vektorraum, dessen Basis $y_{1,}\ldots,y_n$ sind. Zur Feststellung der Linearen Unabhängigkeit müssen $y_{1,}\ldots,y_n$ $(n-1)$ -mal differenzierbar sein.

$$W(y_{1,}\ldots,y_n;x_0):=W(x_0)=\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \cdots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \cdots & y_n'(x_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix}$$

- $y_{1,}\ldots,y_n$ lin. abh.. $\Leftrightarrow W(x)=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$
- $y_{1,}\ldots,y_n$ lin. unabh. $\Leftrightarrow W(x)\neq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Beispiel:

$$y_1(x)=1,\quad y_2(x)=x\,,\quad y_3(x)=x^2$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2 \quad \Leftrightarrow 2\neq 0\Rightarrow y_{1,}y_{2,}y_3 \text{ linear unabhängig}$$

Inhomogene Lösung

Es genügt die allg. Lösung der homogenen und eine der inhomogenen DGL zu bestimmen.

$$y(x)=y_h(x)+y_p(x)$$

- allgemeine Lösung der homogenen DGL: $y_h(x)$
- spezielle Lösung der inhomogenen DGL: $y_p(x)$

Lineare DGL 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y'' + ay' + by = f(x) \quad (a, b \in \mathbb{R})$

Homogene Lösung

Nach dem Aufstellen der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ werden λ_1 und λ_2 mit Hilfe der pq-Formel $\lambda_{1,2} = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ bestimmt. Nun werden drei Fälle unterschieden:

1. **Fall:** $\boldsymbol{\frac{a^2}{4} - b > 0} \quad \Rightarrow y_h(x) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$
   hom. DGL besitzt die zwei Lösungen $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 \neq \lambda_2$
2. **Fall:** $\boldsymbol{\frac{a^2}{4} - b = 0} \quad \Rightarrow y_h(x) = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^{\frac{-a}{2} x}$
   hom. DGL besitzt eine doppelte Lösung $\lambda_1 = \frac{-a}{2}$
3. **Fall:** $\boldsymbol{\frac{a^2}{4} - b < 0} \quad \Rightarrow y_h(x) = c_1 \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega x) + c_2 \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\omega x)$
   hom. DGL besitzt die konjugiert komplexen Lösungen $\lambda_1 = \alpha + j\omega$ und $\lambda_2 = \alpha - j\omega$,
   $\left(\alpha = \frac{-a}{2}, \quad \omega = \sqrt{(b - \frac{a^2}{4})}\right)$

Inhomogene Lösung

Der Ansatz richtet sich nach dem Typ der Störfunktion $f(x)$ (siehe Tabelle).

Beispiel: $y'' - 2y' + y = 6e^x \quad , y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$

1) Charakteristische Gleichung: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-1}$
   $\Rightarrow y_h(x) = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^x$
2) Ansatz für $f(x) = 6e^x$ aus Tabelle ablesen und Ableitungen berechnen:
   $\Rightarrow y_p(x) = A x^2 e^x$
   $y_p'(x) = 2A\, x e^x + A x^2 e^x$
   $y_p''(x) = A e^x (2 + 5x + x^2)$
   Einsetzen in die DGL:
   $A(2 + 4x + x^2) e^x - 2A(2x + x^2) e^x + a x e^x = 6 e^x \quad \Leftrightarrow \quad 2A = 6 \quad \Leftrightarrow \quad A = 3$
   $\Rightarrow y_p(x) = 3x^2 e^x$
3) $y_{(x)} = (c_1 + c_2 \cdot x) \cdot e^x + 3x^2 e^x = (c_1 + c_2 \cdot x + 3x^2) e^x$
4) Für spezielle Lösung c_1 und c_2 finden: $y'(x)$ bestimmen und die Werte aus dem gegebenen Anfangsproblem einsetzen.
   $y'(x) = (c_1 + c2 + 6x + c_2 x + 3x^2) e^x$
   $\Rightarrow y_s(x) = (1 + x + 3x^2) e^x$

Lineare DGL n-ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_1 y^{/}+a_0 y=f(x)$

Homogene Lösung

charakteristische Gleichung: $\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+\ldots+a_1\lambda+a_0=0$ (besitzt n Nullstellen)

Lösungsfunktionen (gemäß der Vielfalt der Nullstellen):

- $\lambda_1\in\mathbb{R}$: einfache Nullstelle $\Rightarrow e^{\lambda_1 x}$
- $\lambda_2\in\mathbb{R}$: k-fache Nullstelle $\Rightarrow e^{\lambda_2 x}, x\cdot e^{\lambda_2 x}, x^2\cdot e^{\lambda_2 x},\ldots, x^{k-1}\cdot e^{\lambda_2 x}$
- $\lambda_3=\alpha+j\beta, \bar{\lambda}_3=\alpha-j\beta\ \in\mathbb{C}$: einfache Nullstelle $\Rightarrow e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)$
- $\lambda_4=\alpha+j\beta, \bar{\lambda}_4=\alpha-j\beta\ \in\mathbb{C}$: k-fache Nullstelle
  $\Rightarrow e^{\alpha x}\cos(\beta x), x\cdot e^{\alpha x}\cos(\beta x),\ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$
  $\Rightarrow e^{\alpha x}\sin(\beta x), x\cdot e^{\alpha x}\sin(\beta x),\ldots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$

Die Linearkombination dieser Lösungsfunktionen ergibt $y_h(x)$.

Inhomogene Lösung

Der Ansatz richtet sich nach dem Typ der Störfunktion $f(x)$ (siehe Tabelle).

Beispiel: $y^{(4)}-2y^{///}+5y^{//}=30x^2+1$

charakteristische Gleichung:

$\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda-2\lambda+5) \Rightarrow \lambda_1=0$ ist doppelte Nullstelle

$\lambda_{2/3}=1\pm\sqrt{-4} \Leftrightarrow \lambda_2=1+j2,\ \lambda_3=1-j2$

$$y_h(x)=\underbrace{c_1+c_2 x}_{\lambda=0}+\underbrace{c_3\cdot e^x\cdot\cos(2x)+c_4\cdot e^x\cdot\sin(2x)}_{\lambda_{2/3}=1\pm j2}$$

Ansatz für partikuläre Lösung nach Tabelle: $f(x)=30x^2+1$

$y_p(x)=A_0 x^2+A_1 x^3+A2 x^4$

$$y_p(x)=A_0 x^2+A_1 x^3+A_2 x^4$$
$$y_p^{/}(x)=2A_0 x+3A_1 x^2+4A_2 x^3$$
$$y_p^{//}(x)=2A_0+6A_1 x+12A_2 x^2$$
$$y_p^{///}(x)=6A_1+24A_2 x$$
$$y_p^{(4)}(x)=24A_2$$

Einsetzen in Ausgangs-DGL mit anschließendem Koeffizientenvergleich:

$$60A_2 x^2+(30A_1-48A_2)x+24A_2-12A_1+10A_0=30x^2+1$$

$$60A_2 x^2=30x^2 \Leftrightarrow A_2=\frac{1}{2}$$

$$(30A_1-48A_2)x=0 \Leftrightarrow A_1=\frac{4}{5}$$

$$24A_2-12A_1+10A_0=1 \Leftrightarrow A_0=\frac{-7}{50}$$

$$y_p(x)=\frac{-7}{50}x^2+\frac{4}{5}x^3+\frac{1}{4}x^4$$

Lösungsansätze für inhomogene DGL

Mit freundlicher Genehmigung von Frau Prof. Dr. Gabriele Schreieck.

- für eine spezielle Lösung von $y'' + a \cdot y' + b \cdot y = q(x)$
- charakteristische Gleichung: $\lambda^2 + a \cdot \lambda + b = 0$
- m : Grad der Störfunktion
- A und B : unbekannte Konstanten, die durch Randbedingungen bestimmt werden müssen

Typ der Störfunktion	***Einschränkung für die Lösung der charakt. Gleichung***	***Ansatz***
$q(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k$	Null ist keine Lösung (d.h. $b \neq 0$)	$y_p=\sum_{k=0}^{m} A_k x^k$
	Null ist einfach Lösung (d.h. $a \neq 0$, $b=0$)	$y_p=\sum_{k=0}^{m} A_k x^{k+1}$
	Null ist doppelte Lösung (d.h. $a=b=0$)	$y_p=\sum_{k=0}^{m} A_k x^{k+2}$
$q(x)=e^{kx}$	k ist keine Lösung	$y_p=A e^{kx}$
	k ist einfach Lösung	$y_p=A x e^{kx}$
	k ist doppelte Lösung	$y_p=A x^2 e^{kx}$
$q(x)=a \cdot \cos(\beta x)$ oder $q(x)=b \cdot \sin(\beta x)$	$\pm j\beta$ sind keine Lösungen	$y_p=A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x)$
	$\pm j\beta$ sind einfache Lösungen	$y_p=x(A\cos(\beta x)+B\sin(\beta x))$
$q(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \cdot e^{cx} \cdot \sin(\beta x)$ oder $q(x)=\sum_{k=0}^{m} a_k x^k \cdot e^{cx} \cdot \cos(\beta x)$	$c+j\beta$ ist keine Lösung	$y_p=e^{cx} \cdot (\sum_{k=0}^{m} A_k x^k \cdot \sin(\beta x) + \sum_{k=0}^{m} B_k x^k \cdot \cos(\beta x))$
	$c+j\beta$ ist eine Lösung	$y_p=x \cdot e^{cx} \cdot (\sum_{k=0}^{m} A_k x^k \cdot \sin(\beta x) + \sum_{k=0}^{m} B_k x^k \cdot \cos(\beta x))$

Die Lösung einer linearen inhomogenen Differenzialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten kann in folgenden Schritten erfolgen:

1) Bestimmen der allgemeinen Lösung $y_h = c_1 \cdot y_1 + c_2 \cdot y_2$ der zugehörigen hom. DGL
2) Ermitteln einer speziellen Lösung y_p in den Teilschritten
   - Ansatz für y_p gemäß obiger Tabelle
   - Bilden der ersten und zweiten Ableitung von y_p
   - Koeffizientenvergleich nach Einsetzen des Ansatzes und seinen Ableitungen in die DGL und Ermitteln der unbestimmten Größen im Ansatz
3) Bilden der allgemeinen Lösung $y = y_h + y_p$ der inhomogen DGL
4) Gegebenfalls Lösen einer Anfangswertaufgabe zur Bestimmung von c_1 und c_2

Laplace Transformation

Hinweis: Aufgrund der im Formeleditor fehlenden stilisierten Großbuchstaben für Integraltransformationen, wird der einfache Großbuchstabe hierfür verwendet.

Eine Integraltransformation ist eine Abbildung T, die jeder Funktion $f(t)$ eines gewissen Funktionsraums eine Funktion $F(s)=T\{f(t)\}$ zuordnet.

Allgemeine Vorgehensweise:

1. Formulierung der Aufgabe ($\rightarrow$ Gleichung)
2. Anwendung der Transformation auf das Modell
3. Lösen des transformierten Modells
4. Rücktransformation

Sei $f(t)$ eine Funktion der Zeit mit $D_f=[0,\infty)$, dann heißt die Funktion
$L\{f(t)\}:=F(s)=\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)dt$ Laplace Transformierte von $f(t)$ (falls das Integral existiert).

BEISPIEL FEHLT!

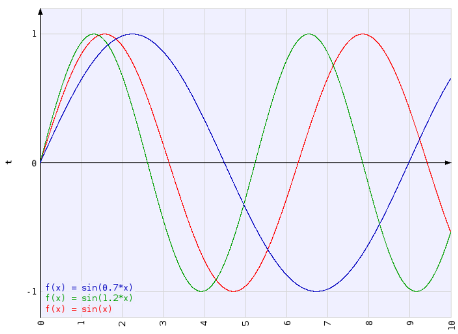
Linearität

$$L\{a_1\cdot f_1(t)+a_2\cdot f_2(t)\} \;=\; a_1\cdot L\{f_1(t)\}+a_2\cdot L\{f_2(t)\}$$

Ähnlichkeitssatz

$$L\{f(a\cdot t)\} \;=\; \frac{1}{a}\cdot F\left(\frac{s}{a}\right) \quad ,a>0$$

Der Übergang von $f(t)$ zu $f(at)$ entspricht einer Dehnung bzw. Stauchung des Graphen längs der Zeitachse (siehe Bild).

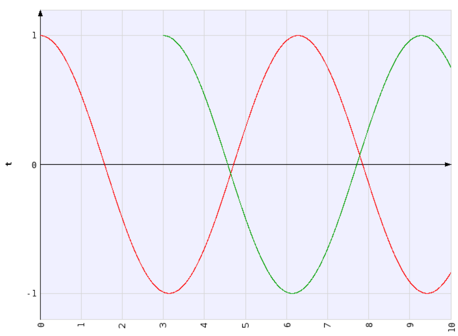


Beispiel: $L\{\sin(t)\} \;=\; \dfrac{1}{s^2+1}$

$$L\{\sin(at)\} \;=\; \frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{s}{a}\right)^2+a^2} \;=\; \frac{1}{a}\cdot\frac{s^2+a^2}{a^2} \;=\; \frac{a}{s^2+a^2}$$

Verschiebungssatz

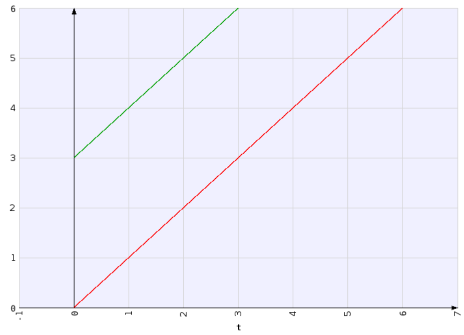
Nach rechts: $L\{f(t-b)\} \;=\; e^{-bs}\cdot F(s)$



Beispiel: $L\{\cos(t)\} \;=\; \dfrac{s}{s^2+1}$

$$L\{\cos(t-3)\} \;=\; e^{-3s}\cdot\frac{1}{s^2+1}$$

Nach links: $L\{f(t+b)\} \;=\; e^{bs}\cdot\left(F(s)-\int_0^b f(t)\,dt\right)$



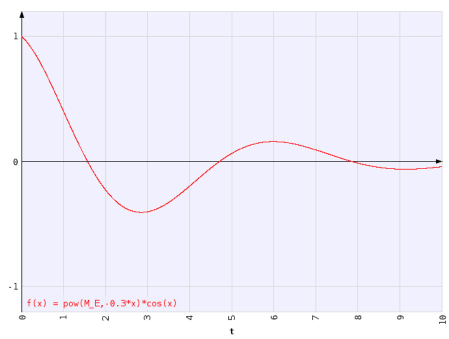
Beispiel:

$$L\{t+3\} \;=\; e^{3s}\cdot\left(\frac{1}{s^2}-\int_0^3 e^{-st}\cdot t\,dt\right) \;=\; e^{3s}\cdot\left(\frac{1}{s^2}-\left[\frac{-st-1}{s^2}\cdot e^{-st}\right]_0^3\right)$$
$$=\; \frac{3s+1}{s^2}$$

oder: $L\{t+3\} \;=\; L\{t\}+L\{3\}=\frac{1}{s^2}+\frac{3}{s}$

Dämpfungssatz

$$L\{e^{-bt}\cdot f(t)\} \;=\; F(s+b) \quad ,b>0$$



Beispiel:

$$L\{e^{-3t}\cdot\cos(t)\} \;=\; \underbrace{F(s+3)}_{F(s)=\frac{s}{s^2+1}}=\frac{s+3}{(s+3)^2+1}$$

Faltungssatz

Die Faltung ist kommutativ, assoziativ und distributiv.

$$L\{F_1(s)\cdot F_2(s)\} \;=\; f_1(t)*f_2(t) \;=\; L\left\{\int_0^t \underbrace{f_1(u)}_{\text{für t u einsetzen}} \cdot \underbrace{f_2(t-u)}_{\text{für t (t-u) einsetzen}}\,du\right\}$$

$$L\{f_1(t)*f_2(t)\} \;=\; F_1(s)\cdot F_2(s)$$

Differentiationssatz

$$L\{f^{(n)}(t)\} \;=\; s^n\cdot F(s)-s^{n-1}\cdot f(0)-s^{n-2}\cdot f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$$

Beispiel: $f(t)=\sin(at)$

$f'(t)=a\cdot\cos(at)$

$$L\{f''(t)\} \;=\; s^2\cdot\frac{a}{s^2+a^2}-s\cdot 0-1\cdot a$$

Multiplikationssatz

$$L\{t^n \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

Beispiel:

$$L\{t^2 \cdot \sin(t)\} = (-1)^2 \cdot F''(s) \underset{\substack{\uparrow \\ F(s)=\frac{1}{s^2+1} \\ F'(s)=-(s^2+1)^{-2}\cdot 2s \\ F''(s)=\ldots}}{=} \frac{6s^2-2}{(s^2+1)^3}$$

Integrationssatz

$$L\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \frac{1}{s}\cdot F(s)$$

Beispiel:

$$L\left\{\int_0^t \cos(u)\,du\right\} = L\{[\sin(u)]_0^t\} = L\{\sin(t)\} = \frac{1}{s^2+1}$$

Divisionssatz

$$\int_s^\infty F(u)\,du = L\left\{\frac{1}{t}\cdot f(t)\right\}$$

Beispiel:

$$L\left\{\frac{\sin(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du = [\arctan(u)]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

Grenzwertsätze

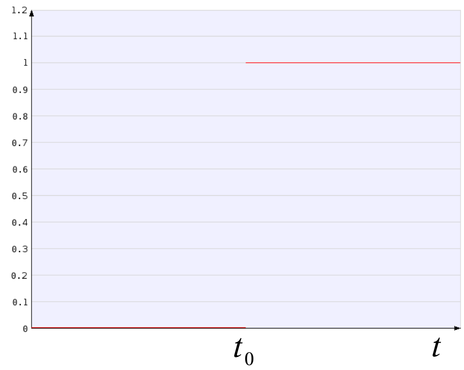
$$f_0 = \lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty}(s\cdot F(s))$$
$$f_\infty = \lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0}(s\cdot F(s))$$

Spezielle Laplace Transformationen

Sprungfuntion (Heaviside-Funktion)

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & t\geq t_0\end{cases}$$

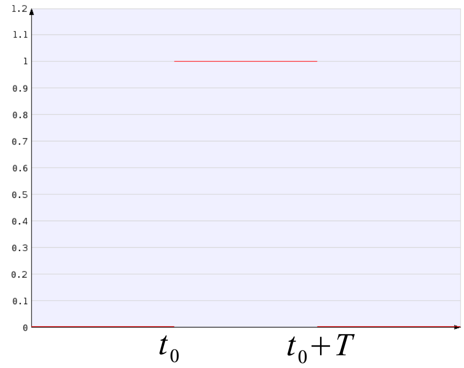
$$L\{f(t)\}=e^{-t_0 s}\cdot\frac{1}{s}$$



Rechteckimpuls

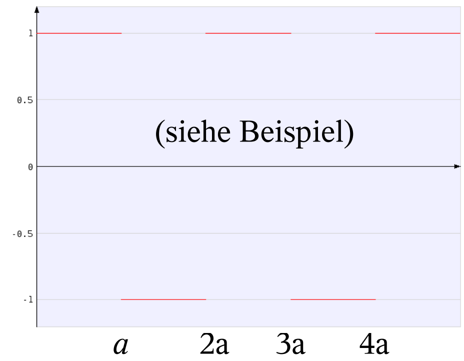
$$f(t)=\begin{cases}0, & t\leq t<t_0\\ 1, & t_0\leq t\leq t_0+T\\ 0, & t>t_0+T\end{cases}$$

$$L\{f(t)\}=\frac{1}{s}\cdot e^{-t_0 s}\cdot(1-e^{-sT})$$



Periodische Funktionen

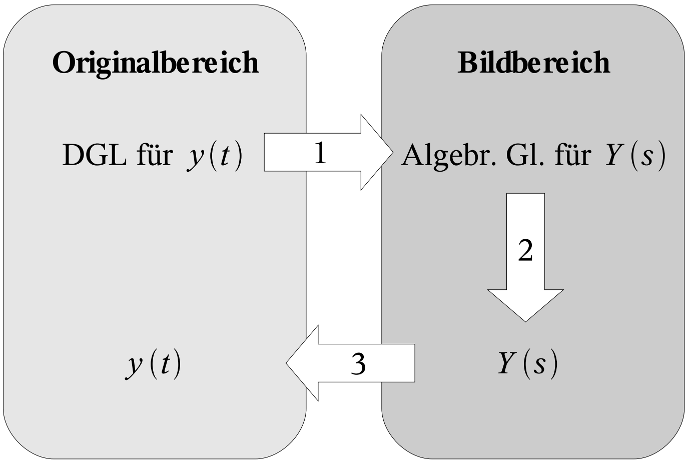
$$L\{f(t)\}=\frac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-st}\,dt$$



Beispiel: $f(t)=\begin{cases}1, & 0\leq t<a\\ -1, & a\leq t<2\text{a}\end{cases}\qquad T=2\text{a}$

$$\begin{aligned}
L\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\,dt \;\Rightarrow\; \frac{1}{1-e^{-s2a}}\int_a^{2\text{a}} e^{-st}\cdot f(t)\,dt\\
&= \frac{1}{1-e^{-2\text{a}}}\left(\int_0^a e^{-st}\,dt+\int_a^{2\text{a}} e^{-st}\cdot(-1)\,dt\right)\\
&= \frac{1}{1-e^{-2\text{a}}}\left(\left[\frac{-1}{s}e^{-st}\right]_0^a+\left[\frac{1}{s}e^{-st}\right]_a^{2\text{a}}\right)\\
&= \frac{1}{1-e^{-2\text{a}}}\left(\frac{-1}{s}e^{-as}+\frac{1}{s}+\frac{1}{s}e^{-2\text{as}}-\frac{1}{s}e^{-as}\right)\\
&= \frac{1}{1-e^{-2\text{a}}}\cdot\frac{1}{s}\left(1-2e^{-sa}+e^{-2\text{as}}\right)\\
&= \frac{1}{1-e^{-2\text{a}}}\cdot\frac{1}{s}\left(1+e^{-sa}\right)^2 \;=\; \frac{1\cdot(a+e^{-sa})^2}{(1+e^{-sa})(1-e^{-sa})\cdot s}\\
&= \frac{(a+e^{-sa})}{(1-e^{-sa})\cdot s} \;=\; \tanh\left(\frac{sa}{2}\right)\frac{1}{s}
\end{aligned}$$

Anwendung. der Laplace-Transf. (lin. DGL mit const. Koeffizienten)



1) Transformation in den Bildbereich
2) Lösen der entstandenen algebraischen Gleichung
3) Rücktransformation

DGL 1. Ordnung

Anfangswertproblem: $y'(t)+a\cdot y(t)=f(t) \quad \wedge \quad y(0)=y_0$

1. $L\{y'(t)+a\cdot y(t)\}=L\{f(t)\}$
   $\Leftrightarrow L\{y'(t)\}+a\cdot L\{y(t)\}=F(s)$ | Ableitungssatz!
   $\Leftrightarrow s\cdot Y(s)-y(0)+a\cdot Y(s)=F(s)$
   $\Leftrightarrow (s+a)Y(s)-y_0=F(s)$

2. $(s+a)Y(s)=F(s)+y_0$
   $$\Leftrightarrow Y(s)=\frac{F(s)+y_0}{s+a}$$

3. $$y(t)=L\left\{\frac{F(s)+y_0}{s+a}\right\}$$

Beispiel: $y'+5y=4\sin(3t) \quad \wedge \quad y(0)=1$

1. $$s\cdot Y(s)-y(0)+5Y(s)=\frac{4\cdot 3}{s^2+9} \qquad \Leftrightarrow (s+5)\cdot Y(s)-1=\frac{12}{s^2+9}$$

2. $$Y(s)=\frac{12}{(s^2+9)(s+5)}+\frac{1}{s+5}$$

3. $$L^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\}=e^{-5t}$$
   $$L^{-1}\left\{\frac{12}{(s^2+9)(s+5)}\right\}\Rightarrow \text{Partialbruchzerlegung}\Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{6}{17}\cdot\frac{1}{s+5}+\frac{-6}{17}\cdot\frac{s}{s^2+9}+\frac{30}{17}\cdot\frac{1}{s^2+9}\right\}$$
   $$=\frac{6}{17}\cdot e^{-5t}+\frac{-6}{17}\cdot\cos(3t)+\frac{30}{17}\cdot\sin(3t)$$
   $$\Rightarrow y(t) = e^{-5t}+\frac{6}{17}\cdot e^{-5t}+\frac{-6}{17}\cdot\cos(3t)+\frac{30}{17}\cdot\sin(3t) = \frac{1}{17}\left(23e^{-5t}-6\cos(3t)+10\sin(3t)\right)$$

DGL 2. Ordnung

Anfangswertproblem: $y''(t)+a\cdot y'(t)+by(t)=f(t) \quad \wedge \quad y(0)=y_0, \quad y'(0)=y_1$

1. $L\{y''(t)\}+a\cdot L\{y'(t)\}+b\cdot L\{y(t)\}=L\{f(t)\}$
   $\Leftrightarrow s^2 Y(s)-s\cdot y(0)-y'(0)+as\cdot Y(s)-a\cdot y(0)+b\cdot Y(s)=F(s)$
2. $(s^2+as+b)\,Y(s)-(s+a)\cdot y(0)-y'(0)=F(s)$
   $\Leftrightarrow Y(s)=\dfrac{F(s)+(s+a)\cdot y(0)+y'(0)}{(s^2+as+b)}$
3. $\Leftrightarrow y(t)=L^{-1}\left\{\dfrac{F(s)+(s+a)\cdot y(0)+y'(0)}{(s^2+as+b)}\right\}$

Beispiel: $y''+2y'+5y=0 \quad \wedge \quad y(0)=10, \quad y'(0)=0$

1. $(s^2+2s+5)\,Y(s)-(s+2)\cdot 10=0$
2. $Y(s)=\dfrac{(s+2)\cdot 10}{s^2+2s+5}$ $\qquad \boxed{s^2+2s+5 \;=\; (s+1)^2+4 \;=\; (s+1)^2+2^2}$
3. $Y(s) \;=\; \dfrac{(s+2)\cdot 10}{s^2+2s+5} \;=\; 10\cdot\dfrac{(s+1)+1}{(s+1)^2+2^2} \;=\; 10\cdot\left(\dfrac{(s+1)}{(s+1)^2+2^2}+\dfrac{1}{(s+1)^2+2^2}\right)$
   $y(t) \;=\; L^{-1}\{Y(s)\}10\cdot\left(e^{-t}\cdot\cos(2t)+\dfrac{e^{-t}\cdot\sin(2t)}{2}\right) \;=\; e^{-t}(10\cdot\cos(2t)+5\cdot\sin(2t))$

Systeme von linearen DGL mit const. Koeffizienten

Beispiel: $\begin{array}{l} y_1'+y_2'+2y_2=e^t \\ y_2'+y_1+2y_2=0 \end{array} \quad \wedge \quad y_1(0)=-1, \quad y_2(0)=1$

Laplace-Transformation:

$$\left|\begin{array}{lcc} s\cdot Y_1(s)-\underbrace{y_1(0)}_{=-1}+s\cdot Y_2(s)-\underbrace{y_2(0)}_{=1}+2\cdot Y_2(s) & = & \dfrac{1}{s-1} \\ s\cdot Y_2(s)-\underbrace{y_2(0)}_{=1}+Y_1(s)+2\cdot Y_2(s) & = & 0 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{lcc} s\cdot Y_1(s)+(s+2)\,Y_2(s) & = & \dfrac{1}{s-1} \\ Y_1(s)+(s+2)\,Y_2(s) & = & 1 \end{array}\right|$$

Lösung mit Cramer'scher Regel

$$D \;=\; \begin{vmatrix} s & s+2 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix} \;=\; s(s+2)-(s+2) \;=\; (s-1)(s+2)$$

$$Y_1(s) \;=\; \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{1}{s-1} & s+2 \\ 1 & s+2 \end{vmatrix}}{(s-1)(s+2)} \;=\; \frac{1}{(s-1)^2}-\frac{1}{s-1} \quad \Rightarrow \quad y_1(t) \;=\; t\cdot e^t-e^t \;=\; (t-1)e^t$$

$$Y_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & \frac{1}{s-1} \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{(s-1)(s+2)} = \frac{s}{(s-1)(s+2)} - \frac{1}{(s-1)^2(s+2)}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{s}{(s-1)(s+2)}\right\} = \frac{1}{3}e^{t} - \frac{2}{3}e^{-2t}$$

$$L^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2(s+2)}\right\} \Rightarrow \text{Partialbruchzerlegung} \Rightarrow L^{-1}\left\{\frac{1}{-9}\cdot\frac{1}{s-1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{(s+2)}\right\}$$

$$= -\frac{1}{9}e^{t} + \frac{1}{3}t\cdot e^{t} + \frac{1}{9}e^{-2t}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{9}\left(4e^{t} - 3t\,e^{t} + 5e^{-2t}\right)$$

Tabelle spezieller Laplace-Transformationen

aus „Mathematische Formelsammlung für Ingenieure und Naturwissenschaftler " von Lothar Papula

	Bildfunktion $F(s)$	***Originalfunktion*** $f(t)$
(1)	$\frac{1}{s}$	1 (Sprungfunktion)
(2)	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
(3)	$\frac{1}{s^2}$	t
(4)	$\frac{1}{s(s-a)}$	$\frac{e^{at}-1}{a}$
(5)	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$t \cdot e^{at}$
(6)	$\frac{1}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b}$
(7)	$\frac{s}{(s-a)^2}$	$(1+at) \cdot e^{at}$
(8)	$\frac{s}{(s-a)(s-b)}$	$\frac{a \cdot e^{at}-b \cdot e^{bt}}{a-b}$
(9)	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{2}t^2$
(10)	$\frac{1}{s^2(s-a)}$	$\frac{e^{at}-at-1}{a^2}$
(11)	$\frac{1}{s(s-a)^2}$	$\frac{(at-1) \cdot e^{at}+1}{a^2}$
(12)	$\frac{1}{(s-a)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 \cdot e^{at}$
(13)	$\frac{s}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2}at^2+t\right) \cdot e^{at}$
(14)	$\frac{s^2}{(s-a)^3}$	$\left(\frac{1}{2}a^2t^2+2\text{at}+1\right) \cdot e^{at}$
(15)	$\frac{1}{s^n}$ (n = 1,2,3,...)	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
(16)	$\frac{1}{(s-a)^n}$ (n = 1,2,3,...)	$\frac{t^{n-1} \cdot e^{at}}{(n-1)!}$
(17)	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\sin(at)}{a}$

	Bildfunktion $F(s)$	***Originalfunktion*** $f(t)$
(18)	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos(at)$
(19)	$\frac{\sin(b)\cdot s+a\cdot\cos(b)}{s^2+a^2}$	$\sin(at+b)$
(20)	$\frac{\cos(b)\cdot s+a\cdot\sin(b)}{s^2+a^2}$	$\cos(at+b)$
(21)	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\cdot\sin(at)}{a}$
(22)	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cdot\cos(at)$
(23)	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\sinh(at)}{a}$
(24)	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh(at)$
(25)	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\cdot\sinh(at)}{a}$
(26)	$\frac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cdot\cosh(at)$
(27)	$\frac{1}{s(s^2+4a^2)}$	$\frac{\sin^2(at)}{2a^2}$
(28)	$\frac{s^2+2a^2}{(s^2+4a^2)^2}$	$\cos^2(at)$
(29)	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t\cdot\sin(at)}{2a}$
(30)	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cdot\cos(at)$
(31)	$\frac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\frac{t\cdot\sinh(at)}{2a}$
(32)	$\frac{s^2+a^2}{(s^2-a^2)^2}$	$t\cdot\cosh(at)$
(33)	$\arctan\left(\frac{a}{s}\right)$	$\frac{\sin(at)}{t}$