Formelsammlung Mathematik (ET052)

Änderungshistorie

22.05.2006	Mittelwertsatz, Taylor'sche Formel, Mc Laurensche Formel
23.05.2006	Polynome, Nullstellen von Polynomen, Regula falsi, Ableitungen spezieller Funktionen, Regeln von de l'Hospital, Tangentengleichung, Schnittwinkel zweier Funktionen, Ableitungsregeln, Differenzialquotient, Differenzierbarkeit, Untersuchung von Funktionen, Monotonieverhalten, Krümmungsverhalten, Extremstellen
24.05.2006	Folgen, Monotonie und Beschränktheit, Grenzwert, Grenzwertsätze, Grenzwerte wichtiger Folgen, Bildungsgesetze, Partialsumme, euler'sche Zahl, Rechenregeln für Grenzwerte von Funktionen
26.05.2006	Einseitige Näherung, Sprungstellen, Polstellen, Asymptote, Stetigkeit, Leitfaden zur Kurvendiskussion, Polynome wieder entfernt (gehörten noch ins erste Semester)
30.05.2006	Korrekturen, Wendestellen
12.06.2006	Newton'sches Näherungsverfahren, Integralrechnung, unbest. Integral, Rechenregeln
13.06.2006	Liste einiger Stammfunktionen, Partielle Integration, Integration durch Substitution, Partialbruchzerlegung (Einsetzmethode)
21.06.2006	Partialbruchzerlegung (Koeffizientenvergleich), Leitfaden zur Partialbruchzerlegung, bestimmtes Integral, Rechenregeln
06.10.2006	Uneigentliche Integrale (unbeschränkte Intervalle und Funktionen), Numerische Integration (Trapez-Regel)
13.10.2006	Integration (Simpson-Regel), einige Stammfunktionen, Korrekturen
06.11.2006	Stammfunktionen

Inhalt

Folgen

Beispiele:

$\langle a_n \rangle = \frac{1}{n^2} = 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots$

$\langle a_n \rangle = 2 = 2,2,2,2,\ldots$ konstante Folge

$\langle a_n \rangle = -1^n \cdot n = -1,2,-3,4,\ldots$ alternierende Folge

$\langle a_n \rangle = n \cdot a_n = 1,2,6,24,\ldots$ rekursiv definierte Folge
$a_1 = 1$ Bildungsgesetz: $a_n = n \cdot (n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Monotonie und Beschränktheit

Eine Zahlenfolge $\langle a_n \rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ heißt

- monoton wachsend (fallend) $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n$ ($\Leftrightarrow a_{n+1} \leq a_n$)
- streng monoton wachsend (fallend) $\Leftrightarrow a_{n+1} > a_n$ ($\Leftrightarrow a_{n+1} < a_n$)
- nach oben (unten) beschränkt $\Leftrightarrow a_n \leq S_o$ ($\Leftrightarrow a_n \geq S_u$)
- beschränkt $\Leftrightarrow |a_n| \leq S$

Wenn eine Folge monoton <u>und</u> beschränkt ist, so ist sie auch konvergent (siehe Grenzwert).

Beispiel: Monotoniebetrachtung: $\langle d_n \rangle = \frac{n+1}{2^n}$

$$\frac{d_n}{d_{n+1}} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^{(n+1)}}{(n+1)+1} = \frac{n+1}{2^n} \cdot \frac{2^n \cdot 2^1}{n+2} = \frac{2n+2}{n+2} = \frac{n+(n+2)}{(n+2)} = \frac{n}{(n+2)} + 1 \quad > 1 \quad \rightarrow \text{str. mon. fallend}$$

Bildungsgesetze

arithmetische Folge: $a_n = c + n \cdot d$ (Abstand zwischen den Gliedern gleichbleibend)
geometrische Folge: $a_n = c \cdot q^n$

Beispiel: Zinsrechnung: $k_n = k_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100\%}\right)^n$ Startkapital: $k_0 = 490\,€$, Zinssatz: $p = 3{,}2\,\%$

Kapital nach 10 Jahren: $k_{10} = 490\,€ \cdot (1+0{,}032)^{10} = 671\,€$

Grenzwert $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

- nähert sich a_n : konvergente Folge, sonst divergent
- nähert sich $\pm\infty$: bestimmte Divergenz
- nähertsich keinem existierendem Grenzwert: unbestimmte Divergenz

Merke: „Die höhere Potenz gewinnt immer.“

Beispiel: konvergente Folge

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2 \cdot (1-5n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{(4n^1 - 4n + 1) \cdot (2n-1)}{(16n^2 - 8n + 1) \cdot (1-5n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{8n^3 \ldots}{-80n^3 \ldots} = \frac{-1}{10}$$

Beispiel: unbestimmt divergente Folge

$\lim\limits_{n\to\infty} -1^n$ existiert nicht

Grenzwertsätze

$\lim\limits_{n\to\infty}(c\cdot a_n)=c\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\pm\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\lim\limits_{n\to\infty} a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty} b_n$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n^x=\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^x$ $(a_n>0, a>0)$

$\lim\limits_{n\to\infty} x^{a_n}=x^{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}$ $(x>0)$

$\lim\limits_{n\to\infty}\log_b a_n=\log_b\left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)$ $(a_n>0, a>0, b\neq 1)$

Grenzwerte wichtiger Folgen

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\begin{cases}\infty & \text{für } q>0\\ 1 & \text{für } q=0\\ 0 & \text{für } -1<q<1\\ \textit{divergent} & \text{für } q\leq -1\end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha}=\begin{cases}0 & \text{für } \alpha>0\\ 1 & \text{für } \alpha=0\\ \infty & \text{für } -\alpha<0\end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{q}=1$ für $q>0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_b n}{n}=0$ $\quad b\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$

$\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha\cdot e^{-n}=0$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a$

Partialsumme

Ist das Ergebnis der Addition von n Gliedern der Folge $\langle a_n\rangle$.

$\langle s_n\rangle=a_{1,}\ a_1+a_{2,}\ a_1+a_2+a_{3,}\ \ldots$

arithmetische Folge: $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(c+k\cdot d)\quad=\frac{n}{2}\cdot(a_0+a_{n-1})$

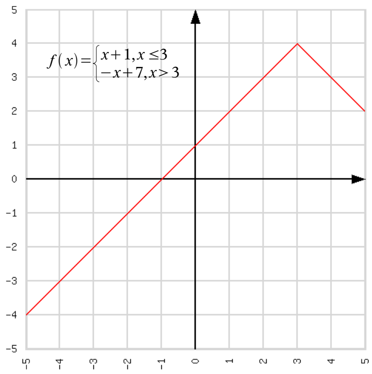
geometrische Folge: $s_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(c\cdot q^k)\quad=c\cdot\frac{1-q^n}{1-q}$

Die euler'sche Zahl

Die Konstante/Funktion für kontinuierliches (natürliches) Wachstum.. e ist nicht endlich. Eine Näherung ist mit dem Grenzwert der Folge $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n:=e\approx 2{,}718288\notin\mathbb{Q}$ möglich.

Grenzwerte von Funktionen

Einseitige Näherung



linksseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = g^-$

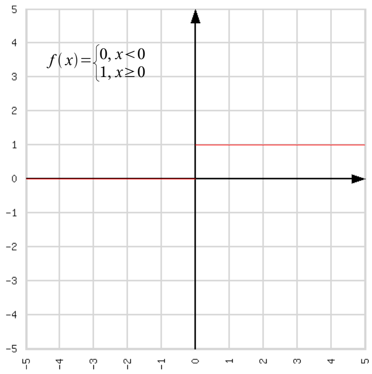
rechtsseitiger Grenzwert: $\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = g^+$

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} x+1, x \leq 3 \\ -x+7, x > 3 \end{cases}$

$\lim_{x \to 3-} f(x) = \lim_{x \to 3-} (x+1) = 4$

$\lim_{x \to 3+} f(x) = \lim_{x \to 3-} (-x+7) = 4$

Sprungstellen

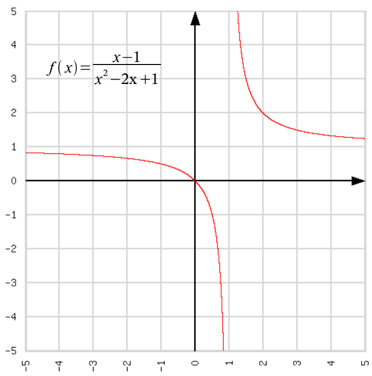


Links- und ein rechtsseitige Grenzwerte existieren, sind jedoch verschieden.

Beispiel: $f(x) = \begin{cases} 0, x < 0 \\ 1, x \geq 0 \end{cases}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \to 0-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to 0+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \lim_{x \to 0} f(x) \text{ existiert nicht}$$

Polstellen



Links- und rechtsseitige Grenzwerte bei Näherung an eine Stelle sind unbeschränkt ($-\infty$ oder ∞). $g^+ = g^-$: gerade Polstelle, ansonsten ungerade Polstelle.

Beispiel:

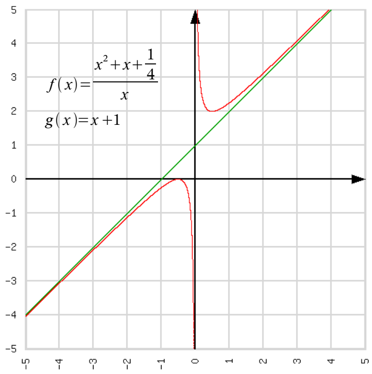
$$\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x + 1} = \frac{(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}$$

$\lim_{x \to 1+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to 1-} f(x) = \infty$

$x = 1 \rightarrow$ ungerade Polstelle

Asymptote



Gerade Funktion, der sich eine Funktion im Unendlichen annähert.

Beispiel:

$$f(x) = \frac{x^2 + x + \frac{1}{4}}{x} = x + 1 + \frac{1}{4x}$$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Asymptote: $g(x) = x + 1$

Rechenregeln

Im Grunde die selben, wie für Grenzwerte von Folgen (Voraussetzung ist die Existenz der Grenzwerte).

$\lim [c \cdot f(x)] = c \cdot \lim f(x)$

$\lim [f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x)$

$\lim [f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$\lim \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$

$\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

$\lim [f(x)]^n = (\lim f(x))^n$

$\lim a^{f(x)} = a^{\lim f(x)}$

$\lim [\log_a \cdot f(x)] = \log_a (\lim f(x))$

Regeln von de l'Hospital

Bedingungen:

- $f(x)$ und $g(x)$ in $[a, b]$ stetig und in (a, b) differenzierbar
- $f(a) = g(a) = 0$ und $g'(x) \neq 0$

  oder

  $g'(x) \neq 0$ und $\lim\limits_{x \to a} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$

Kann auch mehrmals nacheinander angewendet werden.

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Beispiel:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

Differenzialrechnung

Stetigkeit

Bedingungen für $f(x)$ stetig auf $[a,b]$:

- besitzt in $[a,b]$ ein absolutes Maximum und Minimum
- ist $[a,b]$ beschränkt

Alle Polynome und gebrochen rationalen Funktionen (auf ihrem Def.-Bereich) sind stetig.

Beispiel: $f(x)=\begin{cases}0, x<0\\ 1, x\geq 0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0+} f(x)=1=f(0) \;\Rightarrow f$ ist rechtsseitig stetig in 0

$\lim\limits_{x\to 0-} f(x)=0\neq f(0) \;\Rightarrow f$ ist unstetig in 0

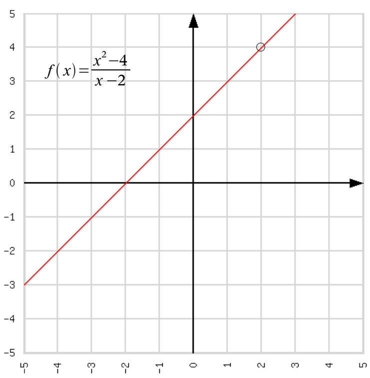
$\Rightarrow f$ ist stetig in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$

Beispiel: Stetigkeitsbeweis für $f(x)=e^x$:

$\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{\lim\limits_{x\to x_0} x} = e_0^x = f(x_0)$ (ähnlich für $\ln(x), \sin(x), \cos(x), x^n, a^x$ usw.)

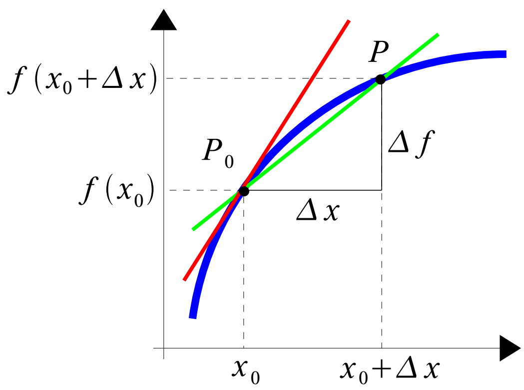
Unstetigkeitsstelle heben

Durch eine „stetige Fortsetzung“ einer Funktion kann eine Unstetigkeitsstelle „gehoben“ werden.



Beispiel: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ $(x\neq 2)$ ist stetig in $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

stetige Fortsetzung: $\tilde{f}(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & , x\neq 2\\ 4 & , x=2\end{cases}$



Differenzialquotient

Die Tangentensteigung ist der Grenzwert der Sekantensteigung für $P\to P_0$, d.h. für $x_0\to 0$.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

Differenzierbarkeit

Eine Funktion ist dann differenzierbar, wenn der Differenzialquotient an $x_0\in D_f$ existiert. Wenn f differenzierbar ist, so ist sie auch stetig – der Umkehrschluss ist allerdings nicht möglich!

Ableitungsregeln

Die Funktionen f und g seien in $[a,b]$ definiert und an $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar.

Faktorregel: $(c \cdot f)'(x_0) = c \cdot f'(x_0)$

Beispiel:

$f(x) = -7x^5 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 35x^4$

Summenregel: $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Beispiel:

$f(x) = 2e^x + 5 \cdot \log x + \sqrt{8} \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 2e^x + \dfrac{5}{x + \ln 10} + \dfrac{1}{2\sqrt{8}}$

Produktregel: $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$

Beispiel:

$f(x) = (x^2 - x + 1) \cdot \sin x \;\Rightarrow\; f'(x_0) = (2x - 1) \cdot \sin x + (x^2 - x + 1) \cdot \cos x$

Quotientenregel: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g(x_0)^2}$

Beispiel:

$f(x) = \dfrac{\ln x}{x} \;\Rightarrow\; f'(x_0) = \dfrac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x2}$

Kettenregel: $(f \circ g)'(x_0) = \underbrace{f'(g(x_0))}_{\text{äußere Abl.}} \cdot \underbrace{g'(x_0)}_{\text{innere Abl.}}$

Beispiele:

$f(x) = e^{-3x} \;\Rightarrow\; f'(x) = e^{-3x} \cdot -3$

$f(x) = (x^2 + 1)^5 \;\Rightarrow\; f'(x) = 5 \cdot (x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x \cdot (x^2 + 1)^4$

$f(x) = (\sin(x^2))^3 \;\Rightarrow\; f'(x) = 3 \cdot (\sin(x^2))^2 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

Liste: Ableitungen spezieller Funktionen

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	***Einschränkungen***
c	0		
x	1	0	
x^n	$n\cdot x^{n-1}$	$n\cdot(n-1)\cdot x^{n-2}$	$n\in\mathbb{R},\ x>0$
$\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{1}{2}\cdot x^{\frac{-1}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{-1}{4}\cdot x^{\frac{-3}{2}}$	$x\geq 0$
$\sqrt[n]{x}=x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}\cdot x^{\frac{1-n}{n}}$		$x\geq 0, n>1$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$	$2\cdot\tan x\,(1\ \tan^2 x)$	$x\neq\frac{\pi}{2}+k\,\pi$
$\cot x$	$-(1+\cot^2 x)$		$x\neq k\,\pi$
a^x	$a^x\cdot\ln a=\frac{a^x}{\log_a e}$	$a^x\cdot\ln a\cdot\ln a$	$a>0, a\neq 1$
e^x	e^x	e^x	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$x>0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\cdot\ln a}$	$\frac{-1}{x^2\cdot\ln a}$	$a>0, a\neq 1, x>0$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-x}{(1-x^2)\cdot\sqrt{1-x^2}}$	$\lvert x\rvert<1$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	
$\text{arccot}\, x$	$\frac{-1}{1+x^2}$		

Nützliches zu Funktionen

Schnittwinkel zweier Funktionen

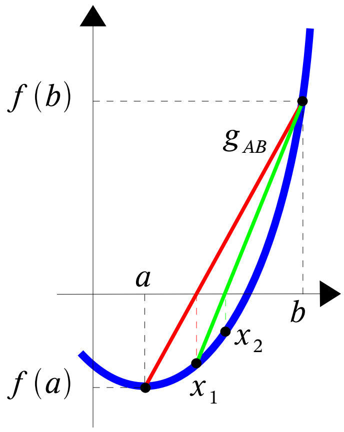
1. Schnittpunkte der Funktionen berechnen (Gleichsetzen)
2. von beiden Funktionen die erste Ableitung bilden
3. Steigungen m_1 und m_2 der Funktionen in den Schnittpunkten ausrechnen
4. Schnittwinkel der Tangenten mit x-Achse: $\arctan(m_1),\ \arctan(m_2)$
5. Winkel voneinander abziehen

Zwei Funktionen schneiden sich unter einem rechten Winkel, wenn $f'(x) \cdot g'(x) = -1$.

Näherungsverfahren (Nullstellen)

Regula falsi

$$x_1=a-\frac{b-a}{f(b)-f(a)}\cdot f(a)$$



Begonnen wird mit den Werten a und b. bei weiteren Berechnungen wird statt a x_n verwendet, welches sich jeweils um ein Dezimalstelle näher an die wirkliche Nullstelle bewegt.

Beispiel: $f(x)=x^2-2$ $\quad a=1,\ b=2$

$$x_1=1-\frac{2-1}{2-(-1)}\cdot -1=\frac{4}{3}$$

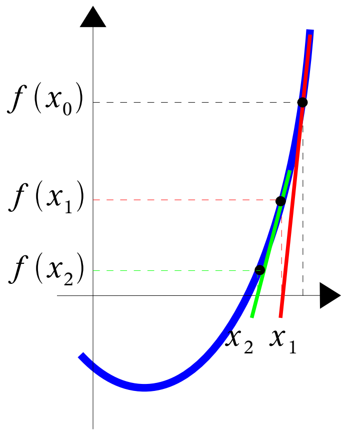
$$x_2=\frac{3}{4}-\frac{2-\frac{4}{3}}{3+\frac{2}{9}}\cdot\left(\frac{-2}{9}\right)=1{,}4$$

$\vdots$

$x_5=1{,}4141414 \Rightarrow f(x_5)=-0{,}000204$

Newton'sches Näherungsverfahren

$$x_n=x_{x-1}-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$



Der Schnittpunkt einer Tangente im Punkt $(x_{0,}\ f(x_0))$ mit der x-Achse bildet die Näherung an die Nullstelle. Konvergiert quadratisch (also weit schneller als die Regula falsi)!

Beispiel: $f(x)=x^2-2$ $\quad x_0=1$

$f'(x)=2x$

$$x_1=1-\frac{1^2-2}{2\cdot 2}=\frac{3}{2}$$

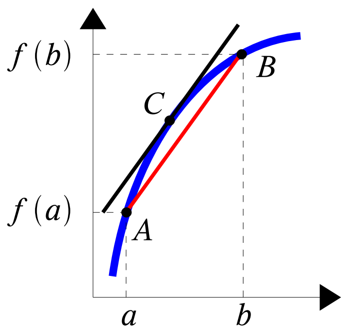
$x_2=1{,}41\overline{6}$

$\vdots$

$x_4=1{,}414213562 \Rightarrow f(x_4)=-0{,}00000000106$

Näherungsverfahren (Funktionen)

Mittelwertsatz der Differenzialrechnung



Auf dem G_f gibt es einen Punkt C der, in dem die Tangente parallel zur Sekante AB ist.

$f(x) = f(x_0) + f^{/}(u) \cdot (x - x_0)$ mit u in $(x_{0,} x)$ oder (x, x_0)

Bedingung:

- $f(x)$ muss in $[a, b]$ stetig differenzierbar sein

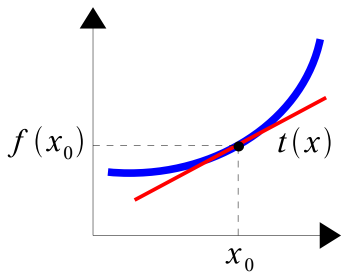
Beispiel: Näherung für $\sqrt{4{,}1}$:

$\sqrt{4{,}1} = \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 0{,}1 = 2 + \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot 0{,}05$ mit $u \in (4, 4{,}1)$

bekannt ist: $4 < u < 4{,}1 = 2 < u < 2{,}1 \Leftrightarrow \frac{1}{2{,}1} < \frac{1}{\sqrt{4}} < \frac{1}{2} = 0{,}4762 < \frac{1}{\sqrt{4}} < 0{,}5$

nun werden $0{,}4762$ und $0{,}5$ oben eingesetzt: $\Rightarrow 2{,}02381 < \sqrt{4{,}1} < 2{,}025$

Tangentengleichung



$t(x) = f^{/}(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Die Tangente am G_f im Punkt $(x_{0,} f(x_0))$ ist eine Näherung an die Funktion $f(x)$ in der Nähe von x_0 .

$f(x) \approx f(x_0) + f^{/}(x_0) \cdot (x - x_0)$

Bespiel: $f(x) = x^2 - 3$ $, x_0 = 5$

$f(x_0) = 22$
$f(5{,}5) \approx 22 + 2 \cdot 5{,}5 \cdot (5{,}5 - 5) = 27{,}5$

Taylor'sche Formel

Ermöglicht die n -fache Annäherung an eine mathematische Funktion in Form eines Taylorpolynoms und einem Restglied, welches den Fehler angibt.

$f(x) = T_{n, x_0}(x) + R_{n, x_0}(x)$

Bedingungen:

- $f(x)$ muss in (a, b) $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar sein
- ein Wert der Funktion $x_0 \in (a, b)$ muss bekannt sein

$$T_{n, x_0}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$
$$= f(x_0) + f^{/}(x_0)(x - x_0) + \frac{f^{//}(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$R_{n, x_0}(x) = \frac{f^{n+1}(u)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ mit einem $u \in (x, x_0)$ oder $(x_{0,} n)$

Beispiel: Näherung an $\ln()$

Ableitungen: $f(x)=\ln(x)$

Bekannte Stelle: $\ln(1)=0$ also $x_0=1$
Anzahl der Näherungen: $n=3$

$$f'(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2} \qquad f'(x_0)=1$$

$$f'''(x)=2x^{-3}=\frac{2}{x^3} \quad \Rightarrow \quad f''(x_0)=-1, \quad f'''(x_0)=2, \quad f^4(x_0)=-6$$

$$f^4(x)=-6x^{-4}=\frac{-6}{x^4}$$

$$T_{3,1}=0+1\cdot(x-1)+\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot(x-1)^2+\frac{2}{6}\cdot(x-1)^3$$ (Taylorpolynom; Näherung der Funktion)

$$R_{3,1}=\frac{-6}{u^4}\cdot\frac{1}{4!}\cdot(x-1)^4=\frac{1}{4u^4}\cdot(x-1)^4$$ (Restpolynom; gibt Fehler an)

Einsetzen:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)=T_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right)-R_{3,1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=\frac{1}{2}-1-\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^3-\frac{1}{4u^4}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)^4 \quad \text{mit einem } u\in\left(\frac{1}{2},1\right)$$

$$=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}-\frac{1}{24}-\frac{1}{4u^4}\cdot\frac{1}{16}$$

$$=\frac{-2}{3}-\frac{1}{64u^4}$$

Fehler (da ein kleineres u hier den größeren Fehler bedeutet, wird nur dies betrachtet):

$$u>\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{u}<2 \;\Leftrightarrow\; \left(\frac{1}{4}\right)^4<16 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{64}\cdot\left(\frac{1}{u}\right)^4<\frac{1}{4}$$ was bedeutet: $|\text{Fehler}|=\left|\frac{1}{64u^4}\right|\leq\frac{1}{4}$

Wird eine Genauigkeit auf eine bestimmte Anzahl Dezimalstellen, beispielsweise vier Nachkommastellen, verlangt, so muss zuerst $\left|R_{n,x_0}(x)\right|\overset{!}{\leq}10^{-4}$ nach n umgestellt werden. Für den Term, der maßgeblich durch u bestimmt ist, wird dann ein Wert von dem wir wissen, dass er den nicht übersteigen kann eingesetzt (für e^u bspw. 3). Nun sollte die Anzahl der benötigten Näherungen (n) ablesbar sein.

Mc Lauren'sche Formel

Spezialfall der Taylor'schen Formel für $x_0=0$ bei dem das Taylor-Polynom einfacher gebildet werden kann.

$$T_{n,0}(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2}\cdot x^2+\ldots+\frac{f^n(0)}{n!}\cdot x^n$$

$$R_{n,0}(x)=\frac{f^{n+1}(u)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}$$

Untersuchung von Funktionen

f sei differenzierbar in (a,b).

Monotonieverhalten

streng monoton wachsend: $f'(x)>0$ mit $x\in(a,b)$
streng monoton fallend: $f'(x)<0$ mit $x\in(a,b)$

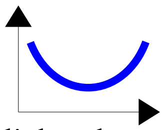
Beispiel:

$$f(x)=\frac{x}{4-x^2} \quad ,D=\mathbb{R}\setminus\{-2,2\}$$

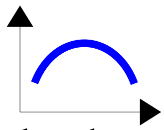
$$f'(x)=\frac{1\cdot(4-x^2)-(x\cdot-2x)}{(4-x^2)^2}=\frac{4-x^2+2x^2}{(4-x^2)^2}=\frac{4+x^2}{(4-x^2)^2}>0 \qquad \text{für alle } x\in D$$

$\rightarrow f$ str. mon. wachsend in $(-\infty,-2)$, $(-2,2)$ und $(2,\infty)$.

Krümmungsverhalten



linksgekrümmt



rechtsgekrümmt

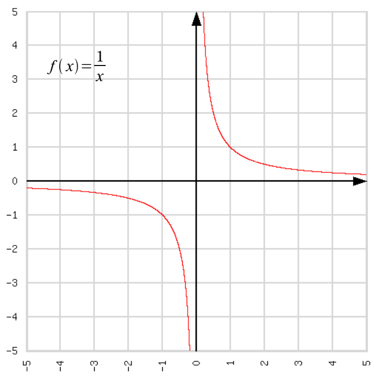
linksgekrümmt: $f''(x)>0$ mit $x\in(a,b)$
rechtsgekrümmt: $f''(x)<0$ mit $x\in(a,b)$

Beispiel:

$$f(x)=\frac{1}{x}=x^{-1} \quad ,D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$$

$f'(x)=-x^{-2} \quad <0$ f.a. $x\in D$
$\rightarrow f$ ist streng monoton fallen in $(-\infty,0)$ und $(0,\infty)$

$$f''(x)=\frac{2}{x^3} \quad \begin{array}{l} >0 \text{ f.a. } x>0 \ \rightarrow \text{ in } (0,\infty) \text{ linksgekrümmt} \\ <0 \text{ f.a. } x<0 \ \rightarrow \text{ in } (-\infty,0) \text{ rechtsgekrümmt} \end{array}$$



Extremstellen

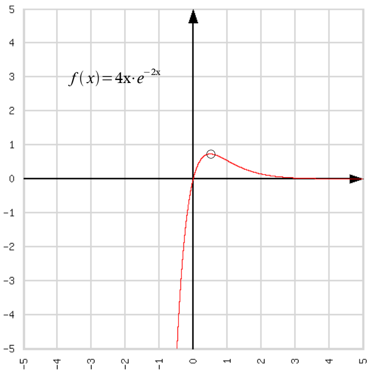
Bedingungen:

- $f^{/}(x)=0$ (Steigung = 0)
- $f^{//}(x)\neq 0$ (Krümmungsrichtung gleichbleibend, <u>muss aber nicht</u>!)
  - $f^{//}(x)>0 \ \rightarrow$ relatives Minimum
  - $f^{//}(x)<0 \ \rightarrow$ relatives Maximum

Genauer: $f(x)$ solange ableiten bis $f^{n}(x_0)=0$.

- n ungerade: x_0 ist eine Extremstelle
- n gerade: x_0 ist keine Extremstelle

Beispiel: $f(x)=4\text{x}\cdot e^{-2\text{x}}$



$f^{/}(x)=4\cdot e^{-2\text{x}}+4\text{x}\cdot e^{-2\text{x}}\cdot -2=(4-8\text{x})\cdot e^{-2\text{x}}$

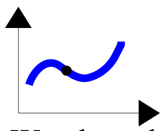
$$f^{/}(x)\stackrel{!}{=}0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} e^{-2\text{x}} \text{ wird nie Null} \\ 4-8\text{x}=0 \Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2} \end{array}$$

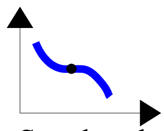
$$\begin{aligned} f^{//}(x)&=(-8)\cdot e^{-2\text{x}}+(4-8\text{x})\cdot e^{-2\text{x}}\cdot -2 \\ &=-8e^{-2\text{x}}+(16\text{x}-8)\cdot e^{-2\text{x}} \\ &=e^{-2\text{x}}\cdot(16\text{x}-16) \end{aligned}$$

$$f^{//}(x_0)<0 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} x_0=\frac{1}{2} \text{ ist Maximumstelle} \\ (\frac{1}{2},\frac{2}{e}) \text{ ist Hochpunkt} \end{array}$$

Wendestellen

An einer Wendestelle ändert sich das Krümmungsverhalten eines Funktionsgraphen. Wenn die Steigung an dieser Stelle gleich Null ist, wird der Punkt Sattelpunkt genannt.

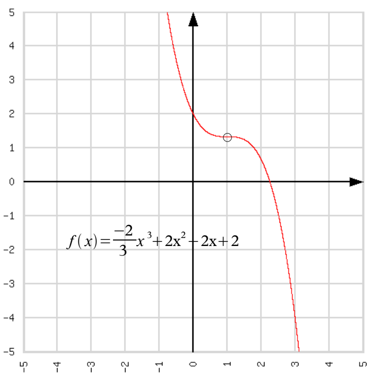

Wendepunkt


Sattelpunkt

Bedingungen:

- $f^{//}(x)=0$
- $f^{///}(x)\neq 0$

Beispiel: $f(x)=\frac{-2}{3}x^3+2\text{x}^2-2\text{x}+2$



$f^{/}(x)=-2\text{x}^2+4\text{x}-2$
$f^{//}(x)=-4\text{x}+4$
$f^{///}(x)=-4$

$f^{//}(x)\stackrel{!}{=}0 \ \Rightarrow -4\text{x}+4=0 \ \Leftrightarrow x_0=1$ (Prüfung: $f^{///}(x_0)\neq 0 \ \Rightarrow x_0$ ist Wendestelle)

Wendepunkt: $P(1,\frac{4}{3})$ ($f^{/}(x_0)=0 \ \Rightarrow P$ ist Sattelpunkt)

Leitfaden: Kurvendiskussion

Mit freundlicher Genehmigung von Prof. Dr. Gabriele Schreieck.

1) Definitionsbereich
Bestimmen Sie D_f

2) Symmetrie
f ist achsensymmetrisch, wenn $f(-x)=f(x)$
f ist punktsymmetrisch, wenn $f(-x)=-f(x)$

3) Schnittpunkt mit der y-Achse
Berechnen Sie $f(0)$

4) Nullstellen
Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichung $f(x)=0$

5) Stetigkeit

6) Differenzierbarkeit

7) Extremwerte
Ermitteln Sie die Lösungen der Gleichung $f'(x)=0$ und überprüfen Sie das Vorzeichen der 2. Ableitung an diesen Stellen.

8) Wendepunkte
$f''(x)=0$; überprüfen mit der 3. Ableitung

9) Monotonie und Krümmung
Ermitteln Sie die Bereiche, in denen f' bzw. f'' positiv bzw. negativ sind:
$f'>0 \Rightarrow f$ streng monoton wachsend,
$f'<0 \Rightarrow f$ streng monoton fallend,
$f''>0 \Rightarrow f$ linksgekrümmt (konvex),
$f''<0 \Rightarrow f$ rechtsgekrümmt (konkav)

10) Verhalten am Rand des Definitionsbereichs bzw. für $x \to \pm\infty$

11) Wertetabelle
Berechnen Sie – falls nötig – für weitere sinnvoll ausgewählte Stellen die zugehörigen Funktionswerte.

12) Graph von f
Skizzieren Sie die Funktion unter Ausnutzung aller gewonnenen Informationen.

Integralrechnung

Die Umkehrung der Ableitung: $F'(x)=f(x)$.

Unbestimmtes Integral

$F(x)+c$ ist die Stammfunktion von $f(x)$. Die Menge aller Stammfunktionen zu $f(x)$ wird unbestimmtes Integral genannt:

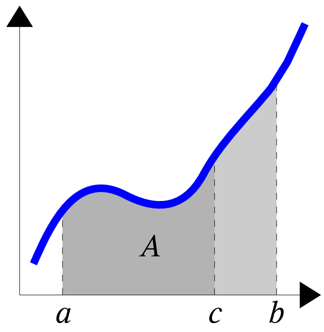
$$\int f(x)\,dx := F(x)+c$$

Bestimmtes Integral

Durch Einsetzen von Integrationsgrenzen wird einer Funktion im Intervall $[a, b]$ ein Zahlenwert zugeordnet:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$$

Rechenregeln



Die Funktionen f und g seien stetige Funktionen.

1) $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$
2) $\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$
3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$
4) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

Partielle Integration

Die Umkehrung der Produktregel der Differenzialrechnung. Von Vorteil, wenn man durch Ableiten von $f(x)$ eine einfachere Funktion erhält. Es kann nötig sein, dieses Verfahren mehrere Male anzuwenden.
Die Stammfunktion von $u(x)$ braucht nicht bekannt sein. Als $v'(x)$ das wählen, was bei einer Integration <u>nicht</u> komplexer (oder unwesentlich) wird.

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$$

Beispiel: $\int x \cdot \ln x\,dx$, $u'(x)=x$, $v(x)=\ln x$

$$=\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \int \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$$

Integration durch Substitution

Das Gegenstück zur Kettenregel in der Differenzialrechnung.

$$\int f(g(x))\cdot \underbrace{g'(x)dx}_{dt} \underset{\text{Substituition}}{=} \int f(t)\,dt = F(t)+c \underset{\text{Resubstitution}}{=} F(\underbrace{g(x)}_{t})+c$$

Beispiel:

$$\int \sin(ax+b)\,dx \underset{\substack{t=ax+b\\ dt=a\,dx\\ dx=\frac{1}{a}dt}}{=} \frac{1}{a}\int \sin(t)\,dt = \frac{1}{a}\cdot -\cos(t)+c = -\cos\frac{(ax+b)\cdot 1}{a}+c$$

Integration durch Partialbruchzerlegung

Gebrochenrationale Funktionen der Form $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$, wobei $p(x)$ und $q(x)$ Polynome sein (oder dazu durch Nullstellensuche umgeformt werden) müssen, können mit dieser Methode auf eine Form gebracht werden, auf die sich die Integrationsregeln anwenden lassen.

Beispiel: Grad $\boldsymbol{p(x)} \geq$ Grad $\boldsymbol{q(x)}$
Erst Polynomdivision, dann Integration des ganzrationalen Anteils. Der echtgebrochene Anteil wird wie unten behandelt.

$$\int \frac{x^2-3x+4}{x}\,dx = \int x-3+\frac{4}{x} = \frac{1}{2}x^2-3x+4\cdot\ln|x|+c$$

Beispiel: Grad $\boldsymbol{p(x)} <$ Grad $\boldsymbol{q(x)}$
Den Bruch als Summe von Partialbrüchen darstellen.

1 Linearfaktoren:

$f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3\cdot(x-2)}$ (hier bereits gegeben)

2 Ansatz:

$$\frac{(x+1)^2}{(x-1)^3\cdot(x-2)} = \frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{B}{x-2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(x-1)^3\cdot(x-2)} = \frac{A_1(x-1)^2(x-2)+A_2(x-1)(x-2)+A_3(x-2)+B(x-1)^3}{(x-1)^3\cdot(x-2)}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)^2 = A_1(x-1)^2(x-2)+A_2(x-1)(x-2)+A_3(x-2)+B(x-1)^3$$

3 Bestimmung der Koeffizienten

3.1 Einsetzmethode (Nullstellen einsetzen)

$x=1:\ 3=-A_3\ \Rightarrow A_3=-4$

$x=2:\ 9=B\ \Rightarrow B=9$

$x=0:\ 1=-2A_1+2A_2+8-9 \Leftrightarrow -2A_1+2A_2=2\ \Rightarrow -A_1+A_2=1$

$x=3:\ 16=4A_1+2A_2+-4+72 \Leftrightarrow 4A_1+2A_2=-52\ \Rightarrow 2A_1+2A_2=-26$

Lineares Gleichungsystem lösen...

$3A_1 = -27 \Rightarrow A_1 = -9 \wedge A_2 = -8$

3.2 Koeffizientenvergleich-Methode (Ansatz ausmultiplizieren und vergleichen)

$$(x+1)^2 = A_1(x-1)^2(x-2) + A_2(x-1)(x-2) + A_3(x-2) + B(x-1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = A_1(x^3-4x^2+5x-2) + A_2(x^2-3x+2) + A_3(x-2) + B(x^3+3x^2+3x+1)$$

$$\Leftrightarrow x^2+2x+1 = x^3(A_1+B) + x^2(-4A_1+A_2+3B) + x(5A_1-3A_2+A_3+3B) + (-2A_1+2A_2-2A_3+B)$$

Koeffizienten vergleichen:

$x^3 \Rightarrow A_1 + B = 0$

$x^2 \Rightarrow -4A_1 + A_2 + 3B = 1$

$x^1 \Rightarrow 5A_1 - 3A_2 + A_3 + 3B = 2$

$x^0 \Rightarrow -2A_1 + 2A_2 - 2A_3 + B = 1$

LGS-Aufstellen und lösen...

4 Integration

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-9}{x-1} + \frac{-8}{(x-1)^2} + \frac{4}{(x-1)^3} + \frac{9}{x-2}$$

Integrieren...

$$\int f(x)\,dx = -9\int \frac{1}{x-1}\,dx - 8\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + 4\int \frac{1}{(x-1)^3}\,dx + 9\int \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= -9\cdot\ln|x-1| + 8\cdot\frac{1}{(x-1)} + 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + 9\cdot\ln|x-2| + c$$

$$= -9\cdot\ln|x-1| + 9\cdot\ln|x-2| + \frac{8}{(x-1)} + \frac{2}{(x-1)^2} + c$$

Leitfaden: Partialbruchzerlegung

Mit freundlicher Genehmigung von Frau Prof. Dr. Schreieck.

1) Zerlegung von $q(x)$ in Linearfaktoren

$(x+x_0)$	für jede einfache reelle Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$
$(x+x_0)^k$	für jede k-fache reelle Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$
(x^2+px+q)	für jedes Paar einfacher komplexer Nullstellen $x_{0,}\overline{x_0} \in \mathbb{C}$
$(x^2+px+q)^k$	für jedes paar k-facher komplexer Nullstellen $x_{0,}\overline{x_0} \in \mathbb{C}$

2) Ansatz

Mit zunächst nicht bestimmten Koeffizienten $A, A_{1,} A_{2,} \ldots, B, B_{1,} B_{2,} \ldots, C, C_{1,} C_{2,} \ldots$ werden folgende Partialbrüche angesetzt:

Nennerterm	Partialbruchansatz
$(x+x_0)$	$\frac{A}{(x+x_0)}$
$(x+x_0)^k$	$\frac{A_1}{(x+x_0)}+\frac{A_2}{(x+x_0)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x+x_0)^k}$
(x^2+px+q)	$\frac{Bx+C}{x^2+px+q}$
$(x^2+px+q)^k$	$\frac{B_1x+C_1}{x^2+px+q}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{B_kx+C_k}{(x^2+px+q)^k}$

3) Bestimmung der Koeffizienten

- Alle Partialbrüche werden auf einen Nenner gebracht.
- Einsetzen der Nennernullstellen und ggf. weiterer Werte führt auf ein LGS

oder

- Koeffizientenvergleich

4) Integration der Partialbrüche unter Verwendung der folgenden Integrale

$$\int \frac{1}{x-a}dx = \ln|x-a|+c$$

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = -\frac{1}{k-1}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+c$$

Bei folg. Integralen ist Voraussetzung, dass der Nenner nicht weiter zerlegbar ist und $k>1$.

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot\arctan\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)+c$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}dx = \frac{a}{2}\cdot\ln|x^2+px+q|+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx = \frac{2x+p}{(k-1)(4q-p^2)(x^2+px+q)^{k-1}}+\frac{2\cdot(2k-3)}{(k-1)(4q-p^2)} + \int \frac{1}{(x^2+px+q)^{k-1}}dx$$

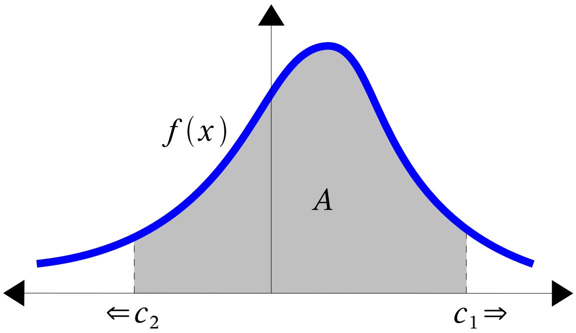
$$\int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^k}dx = -\frac{a}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}}+\left(b-\frac{ap}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+px+q)^k}dx$$

Liste: Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	c	$\cos x$	$\sin x + c$
a	$ax + c$	$\cos^2 x$	$\frac{x + \sin x \cdot \cos x}{2} + c$
x	$\frac{1}{2} x^2 + c$	$\tan x$	$-\ln \cos x + c$
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$	$\cot x$	$\ln \sin x + c$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + c$	$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{1+n} \cdot x^{\frac{1}{n}+1} + c$	$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + c$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + c$
e^x	$e^x + c$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	$\operatorname{arsinh} x + c$
e^{ax}	$\frac{1}{a} e^{ax} + c$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$	$\operatorname{arcosh} x + c$
$x \cdot e^x$	$(x-1) \cdot e^x + c$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$x \cdot e^{-ax}$	$-\frac{ax-1}{a^2} e^{-ax} + c$	$\frac{1}{4+x^2}$	$\frac{1}{2} \arctan(\frac{x}{2}) + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$	$\frac{1}{1-x^2}$, $\|x\| < 1$	$\operatorname{artanh} x + c$
$\frac{1}{x+a}$	$\ln\|x+a\| + c$	$\frac{1}{1-x^2}$, $\|x\| > 1$	$\operatorname{arcoth} x + c$
$\frac{x}{x-1}$	$x - 1 + \ln\|x-1\| + c$	$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln u(x) + c$
$\frac{1}{x^2+a}$	$\frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + a) + c$		
$\ln x$	$x \ln x - x + c$		
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a}(x \ln x - x)$		
$\sin x$	$-\cos x + c$		
$\sin^2 x$	$\frac{x - \sin x \cdot \cos x}{2} + c$		

Uneigentliches Integral

Unbeschränkte Intervalle



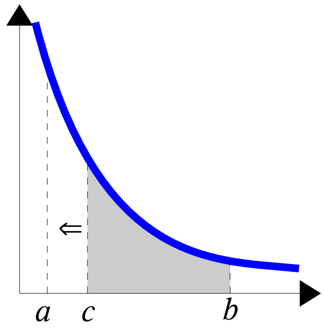
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{\substack{c_1 \to \infty \\ c_2 \to -\infty}} \int_{c_2}^{c_1} f(x)\,dx$$

(falls die Grenzwerte existieren, ansonsten ist das Integral divergent)

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{2} e^x\,dx \;=\; \lim_{c \to -\infty} \int_{c}^{2} e^x\,dx \;=\; \lim_{c \to -\infty} [e^x]_c^2 \;=\; \lim_{c \to -\infty} (e^2 - e^c) \;=\; e^2$$

Unbeschränkte Funktionen



Wenn die Integrationsgrenzen einen Wert enthalten, für den die Funktion nicht definiert ist, kann man sich diesem Punkt über dem Limes annähern:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \;=\; \lim_{c \to a+} \int_{c}^{a} f(x)\,dx \quad \text{(falls die Grenzwerte existieren)}$$

(in die entgegengesetzte Richtung natürlich ebenso möglich)

Beispiel:

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \;=\; \lim_{c \to 0-} \int_{-1}^{c} x^{-\frac{1}{3}}\,dx \;=\; \lim_{c \to 0-} \left[\frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}}\right]_{-1}^{c} \;=\; \frac{3}{2} \cdot (0 + 1^{\frac{2}{3}}) \;=\; \frac{3}{2}$$

Weiteres Beispiel:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; 2 \cdot \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; 2 \cdot \lim_{c \to 0+} \int_{c}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \;=\; 2 \cdot \lim_{c \to 0+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{c}^{1} \;=\; 2 \cdot \left(-1 + \frac{1}{c}\right) \quad \textbf{(Fehler!)}$$

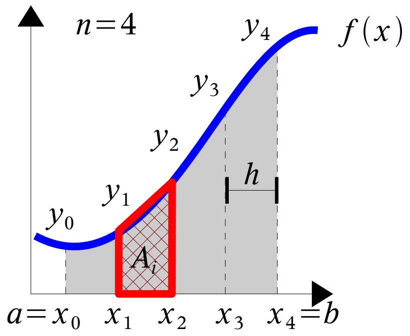
$\frac{1}{x^2}$ ist auf $[-1,1]$ n icht stetig $\rightarrow$ besitzt keine Stammfunktion.

Numerische Integration

Näherungsweise Berechnung von ungeschlossenen Integralen (der Fall, wenn eine Funktione keine Stammfunktion besitzt).

Trapez-Regel

Der Intervall $[a,b]$ wird in n Teilintervalle der gleichen Breite h zerlegt, und deren Trapezflächen dann aufsummiert. Ist $f(x)$ zwei mal differenzierbar, so kann ebenfalls der max. Fehler ΔF berechnet werden.



Breite: $h=\dfrac{b-a}{n}$

Stützstellen: $x_i=a+i\cdot h$

Stützwerte: $y_i=f(x_i)$

$$T_n=\int_a^b f(x)\,dx \;\approx\; \frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+i\cdot a)+f(b)\right)$$

$$|\Delta F|\leq\frac{b-a}{12}\cdot h^2\cdot \max_{a\leq x\leq b}|f''(x)|$$

$\leftarrow$ *max* : dritte Ableitung $=0$ setzen und nach x auflösen

Beispiel:

$$A=\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx \;=\; 2 \quad \text{(Zielergebnis)}$$

$n=6$, Breite: $h=\dfrac{\pi}{6}$

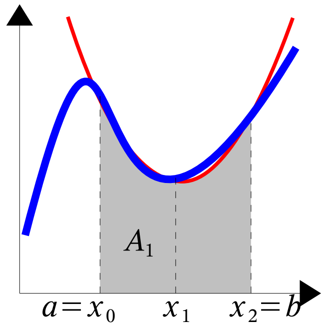
Stützstellen: $x_0=0,\;\; x_1=\dfrac{\pi}{6},\;\; x_2=\dfrac{\pi}{3},\;\; x_3=\dfrac{\pi}{2},\;\; x_4=\dfrac{2\pi}{3},\;\; x_5=\dfrac{5\pi}{6},\;\; x_1=\pi$

$$T_6 \;=\; \frac{\pi}{12}\cdot\left(\sin(0)+2\cdot\left(\sin(\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{3})+\sin(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{2\pi}{3})+\sin(\frac{5\pi}{6})\right)+\sin(\pi)\right) \;=\; 1{,}95409\ldots$$

$$|\Delta F| \;\leq\; \frac{\pi}{13}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^2\cdot\underbrace{\max_{0\leq x\leq\pi}|-\sin(x)|}_{=1} \;\leq\; \frac{\pi^3}{436}=0{,}0717\ldots$$

Simpson-Regel

Die Fläche in $[a,b]$ wird mit Hilfe einer Parabel interpoliert.



$$S_n=\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\approx \frac{h}{3}\left(f(a)+4\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(a+(2i-1)\cdot h)}_{\text{alle ungeraden Stützstellen}}+2\underbrace{\sum_{i=1}^{n} f(a+2ih)}_{\text{alle geraden Stützstellen}}+f(b)\right)$$

Ist $f(x)$ vier mal differenzierbar, so gilt für den Fehler:

$$|\Delta F| \;\le\; \frac{b-a}{180}\cdot h^4\cdot \max_{a\le x\le b}|f^4(x)|$$

Beispiel:

$$A=\int_0^{\pi}\sin(x)\,dx \qquad 2n=6\text{ , Breite: } h=\frac{\pi}{6}$$

Stützstellen: $x_0=0,\;\; x_1=\frac{\pi}{6},\;\; x_2=\frac{\pi}{3},\;\; x_3=\frac{\pi}{2},\;\; x_4=\frac{2\pi}{3},\;\; x_5=\frac{5\pi}{6},\;\; x_1=\pi$

$$S_6 \;=\; \frac{\pi}{18}\cdot\left(\sin(0)+4\cdot\left(\sin(\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{5\pi}{6})\right)+2\cdot\left(\sin(\frac{\pi}{3})+\sin(\frac{2\pi}{3})\right)+\sin(\pi)\right) \;=\; 2{,}00086319\ldots$$

$$|\Delta F| \;\le\; \frac{\pi}{180}\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right)^4\cdot \max_{0\le x\le\pi}|-\sin(x)| \;\le\; 0{,}0013\ldots$$