Formelsammlung Mathematik

Änderungshistorie:

11.11.2005	Erste Version; Logarithmen; Vektoren
13.11.2005	Vektoren: Skalarprodukt, Richtungswinkel, Vektorprodukt
17.11.2005	Korrekturen, Spatprodukt, Geraden, Abstand Punkt-Gerade
19.11.2005	Korrekturen, Ebenen (Parameterdarst., (Hesse-)Normalform), Abstand Ebene-Ursprung, Abstand Punkt-Ebene, Abstand Gerade-Gerade
25.11.2005	Vektorraum, Lineare Abhängigkeit, Basis
27.11.2005	Matrizen, Transponieren, Matrixmultiplikation, Falk-Schema
29.11.2005	Inhaltsverzeichnis, Koordinatentransformation mit Matrizen, Determinanten (Sarrus, Laplace), Dreiecksmatrix, Elementaroperationen
03.12.2005	Rang einer Matrix
05.12.2005	Potenzen, Wurzeln, Trigonometrie Grundlagen
06.12.2005	Inverse Matrix
20.12.2005	Lineare Gleichungssysteme, Cramer'sche Regel, Gauß'sches Eliminationsverfahren
02.01.2006	Komplexe Zahlen, Inverses Element, Darstellungsformen, Umformungen, Rechnen in der Normalform
10.01.2006	Rechnen in der Polarform, Potenzen, Wurzeln
15.01.2006	Korrekturen
18.04.2006	Polynome (Nullstellen)

Inhalt

Potenzen

$a, b, x, y \in \mathbb{R}$ und $a, b > 0$

$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ $\qquad$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\qquad$ $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$

$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ $\qquad$ $a^0 = 1$ $\qquad$ $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

Wurzeln

$m, n \in \mathbb{N}$ und $a, b \in \mathbb{R}$

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ $\qquad$ $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $\qquad$ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$

Logarithmen

Logarithmen mit gleicher Basis

(hier für Basis e)

$\ln(a) + \ln(b) = \ln(a \cdot b)$ $\qquad$ $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ $\qquad$ $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$

$\ln(a^2) = 2 \cdot \ln(a)$

Allgemein

$a^{\log_a(x)} = x$ $\qquad$ $\ln(a^n) = n \cdot \ln(a)$ $\qquad$ $\ln(\sqrt{a}) = \ln(a^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}\ln(a)$

Trigonometrie Grundlagen

Rechtwinkliges Dreieck

$\sin(\alpha) = \frac{g}{h}$ $\qquad$ $\cos(\alpha) = \frac{a}{h}$

$\tan(\alpha) = \frac{g}{a}$ $\qquad$ $\cot(\alpha) = \frac{a}{g}$

$a =$ Ankathete, $g =$ Gegenkathete, $h =$ Hypothenuse

$h^2 = a^2 + g^2$ (Satz des Pythagoras)

Sinussatz

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$$

Konsinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\text{bc} \cdot \cos(\alpha)$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\text{ac} \cdot \cos(\beta)$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\text{ab} \cdot \cos(\gamma)$$

Vektoren

Betrag eines Vektors

(seine Länge)

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad |\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{14}$$

Vektor normieren (Einheitsvektor)

(Länge auf 1 verkürzen unter Beibehaltung der Richtung)

$$\vec{a}^0=\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \vec{a}^0=\frac{1}{\sqrt{14}}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Gleichheit zweier Vektoren

Zwei Vektoren gelten dann als gleich, wenn Betrag und Richtung identisch sind. Die absolute Position ist *kein* Kriterium.

Ortsvektor

Zeigt vom Nullpunkt (oder $\vec{0}$) auf einen bestimmten Punkt (gegeben durch absolute Koordinaten)

$$\vec{a}=\overrightarrow{0\mathrm{P}}=\vec{r}(P)$$

Strecke zwischen zwei Punkten (Abstand zwischen zwei Punkten)

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$$

Der Abstand ist der Betrag dieses Vektors!

Vektor-Addition

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}, \quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix} \quad \vec{c}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

Skalare Multiplikation

(ein Vektor mit einer reellen Zahl multiplizieren)

$$\vec{b}=\lambda\cdot\vec{a} \;\Leftrightarrow\; |\vec{b}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|$$

$$\vec{b}=\begin{pmatrix}\lambda\cdot a_1\\\lambda\cdot a_2\\\lambda\cdot a_3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$$

Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ergibt eine reelle Zahl.

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$= |\vec{a}| \circ |\vec{b}| \cdot \cos(\varphi)$$

$$\varphi \Rightarrow \arccos\left(\frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}\right)$$

$\vec{a} \perp \vec{b}$ $(\varphi = 90°)$ wenn $\vec{a} \circ \vec{b} = 0\,!$

$$\vec{a} \circ \vec{b} > 0 \Rightarrow \varphi > 90°$$
$$\vec{a} \circ \vec{b} < 0 \Rightarrow \varphi < 90°$$

$$\vec{a} \circ \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

Richtungswinkel

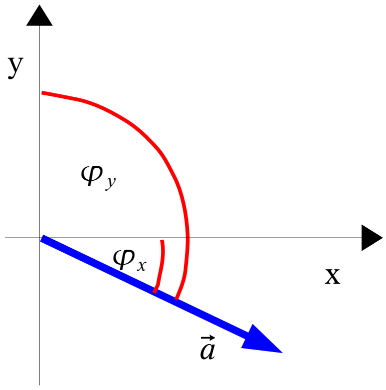
Winkel, die ein Vektor zusammen mit der x- oder y-Achse einschließt (ohne Drehsinn, d.h. es wird immer der Kleinere angegeben).

$$\varphi_x \Rightarrow \arccos\left(\frac{a_1}{|\vec{a}|}\right)$$

$$\varphi_y \Rightarrow \arccos\left(\frac{a_2}{|\vec{a}|}\right)$$

$$\varphi_z \Rightarrow \arccos\left(\frac{a_3}{|\vec{a}|}\right)$$

$$(\cos(\varphi_x))^2 + (\cos(\varphi_x))^2 = 1 \ \text{(Ebene)}$$
$$(\cos(\varphi_x))^2 + (\cos(\varphi_x))^2 + (\cos(\varphi_z))^2 = 1 \ \text{(Raum)}$$

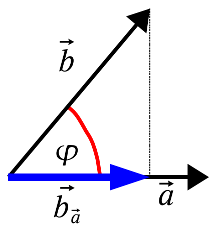


Projektion eines Vektors auf einen anderen

$\vec{b}_{\vec{a}}$ hat die selbe Richtung wie $\vec{a}$.

$$|\vec{b}_{\vec{a}}| \ = \ \cos(\varphi) \cdot |\vec{b}| \ = \ \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|}$$

$$\vec{b}_{\vec{a}} \ = \ |\vec{b}_{\vec{a}}| \cdot \vec{a}^0 \ = \ \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}|^2} \ \vec{a}$$



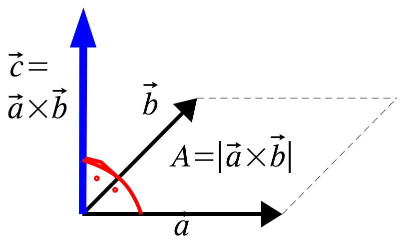
Vektorprodukt (Kreuzprodukt)

Unter dem Vektorprodukt $\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$ versteht man einen Eindeutig bestimmten Vektor, der auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal steht ($\vec{c}\perp\vec{a}\wedge\vec{c}\perp\vec{b}$ bzw. $\vec{c}\circ\vec{a}=0\wedge\vec{c}\circ\vec{b}=0$).
Der Betrag des Vektorprodukts ist gleich der Fläche $\vec{A}$ des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms.
Kommutativ- und Assoziativgesetz gelten genauso wenig, wie es neutrale oder inverse Elemente gibt.

$$|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin(\varphi) \qquad \varphi\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})\in[0,180°]$$

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\quad \vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$



Rechenregeln:
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ sind Vektoren im Raum, $\lambda\in\mathbb{R}$
1. $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$
2. $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}(\lambda\vec{b})$
3. $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$
4. $\vec{a}\times\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a},\vec{b}$ sind kollinear
   (einer ist Vielfaches des anderen)
5. $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

Spatprodukt

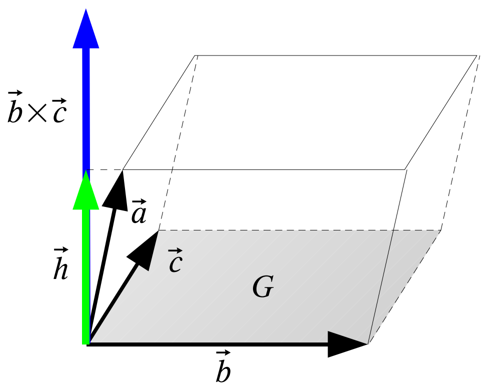
Das Spatprodukt entspricht der Determinante von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ (in dieser Reihenfolge!).
Ein Spat ist ein Parallelogramm im Raum.

$$det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})$$

$$det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\ \begin{matrix}>0\Rightarrow\text{Rechtssystem}\\<0\Rightarrow\text{Linkssystem}\\=0\Rightarrow\vec{a},\vec{b},\vec{c}\ \text{liegen in Ebene, sind komplanar, linear abhängig}\end{matrix}$$

1) $det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=det(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=det(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-det(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-det(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-det(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$
2) $det(\vec{a}+\vec{d},\vec{b},\vec{c})=det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})+det(\vec{d},\vec{b},\vec{c})$
3) $det(\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\lambda\cdot det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$
4) $det(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)=1$

$G=|\vec{b}\times\vec{c}|$
$|\vec{h}|=|a_{\vec{b}\times\vec{c}}|=|\vec{a}\circ(\vec{b}\times\vec{c})|$
$V=G\cdot|\vec{h}|$
$\Rightarrow V=|det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$

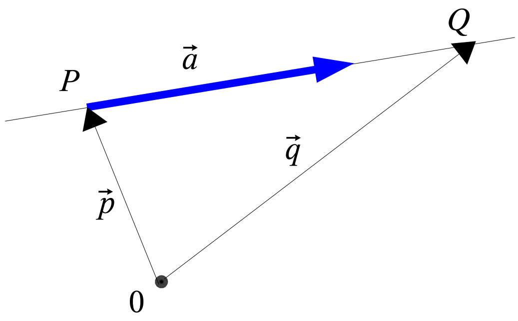


Geraden

Punkt-Richtungsform (Parameter-Darstellung)

(gegeben sind ein Punkt P und ein Vektor $\vec{a}$)

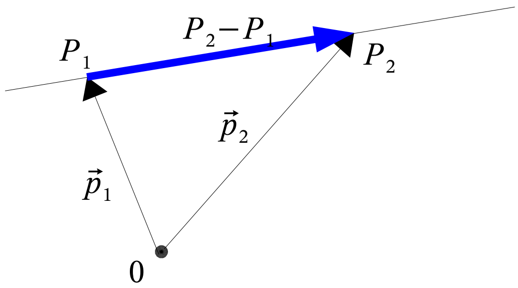
$g: \vec{q} = P \cdot \lambda \vec{a}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$



Zwei-Punkt-Form

(gegeben sind zwei Punkte P_1 und P_2)

$g: \vec{q} = P_1 \cdot \lambda (\vec{p}_2 - \vec{p}_1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$



Verhalten zweier Geraden zueinander

$g_1: \vec{q} = \vec{p}_1 \cdot \lambda \vec{a}_1, \quad \lambda \in \mathbb{R}$
$g_2: \vec{q} = \vec{p}_2 \cdot \mu \vec{a}_2, \quad \mu \in \mathbb{R}$

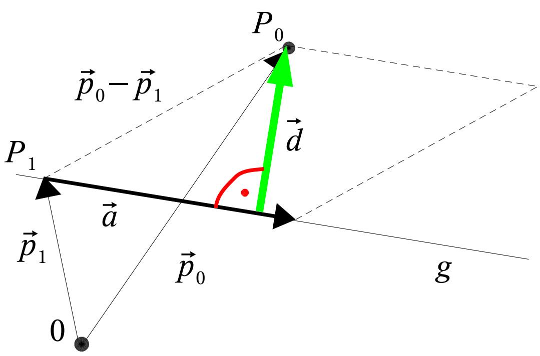
1) gleich $\Leftrightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2$ und $\vec{p}_2 - \vec{p}_1$ sind kollinear
2) parallel $\Leftrightarrow \vec{a}_1$ und $\vec{a}_2$ sind kollinear
3) sich in einem Punkt schneiden $\Leftrightarrow \vec{p}_1 + \lambda \vec{a}_1 = \vec{p}_2 + \mu \vec{a}_2$
4) windschief $\Leftrightarrow$ 1), 2) und 3) gelten nicht

Abstand: Punkt – Gerade

Gegeben sind eine gerade $g: \vec{q} = P_1 \cdot \lambda \vec{a}$ sowie ein Punkt P_0. $\vec{a}$ und $\vec{p}_0 - \vec{p}_1$ spannen ein Parallelogramm auf, dessen Höhe $\vec{d}$ ist.

$$\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{p}_0 - \vec{p}_1)$$

$$|\vec{d}| = \frac{|\vec{a} \times (\vec{p}_0 - \vec{p}_1)|}{|\vec{a}|}$$



Abstand: Gerade – Gerade

(gegeben sind zwei Geraden: $g_1: \vec{q} = p_1 \cdot \lambda \vec{a}_1$ und $g_2: \vec{q} = p_2 \cdot \mu \vec{a}_2$)

Geraden sind parallel:
($\vec{a}_1$ linear abhängig von $\vec{a}_2$)

$$|\vec{d}| = \frac{|\vec{a}_1 \times (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)|}{|\vec{a}_1|}$$

Geraden sind windschief:

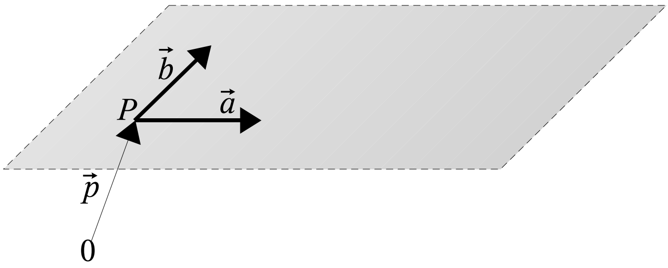
$$|\vec{d}| = \frac{|det(\vec{a}_1, \vec{a}_2, (\vec{p}_2 - \vec{p}_1))|}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|}$$

Ebenen

Punkt-Richtungs-Form (Parameter-Darstellung)

(gegeben sind ein Punkt P ($\vec{p}$ = Ortsvektor) und zwei nicht kollineare Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ($\vec{a}, \vec{b}$ = Richtungsvektoren))

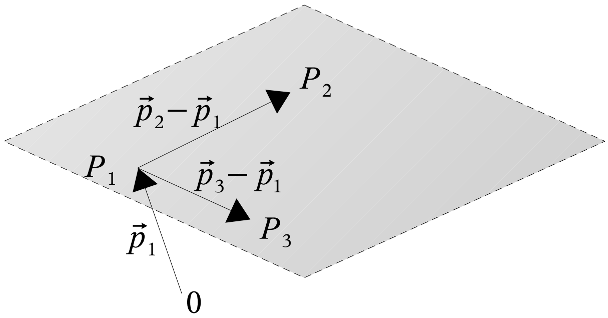
$$E: \vec{q} = \vec{p} + \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



Drei-Punkt-Form (Parameter-Darstellung)

(gegeben sind drei Punkte P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer Gerade liegen)

$$E: \vec{q} = \vec{p}_1 + \lambda(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) + \mu(\vec{p}_3 - \vec{p}_1), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$



Normalform

(gegeben ist ein Punkt P und ein Vektor $\vec{n}$, zu dem die Ebene senkrecht verlaufen soll)

$$E: \vec{q} \circ \vec{n} - \vec{p} \circ \vec{n} = 0$$

Hesse-Normalform

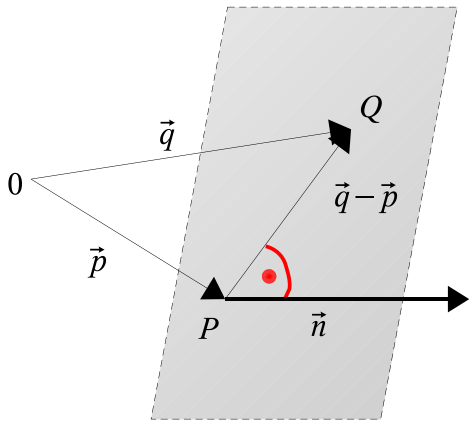
(statt $\vec{n}$ (Normalenvektor) $\vec{n}^0$ (Normaleinheitsvektor))

$$E: \vec{q} \circ \vec{n}^0 - \vec{p} \circ \vec{n}^0 = 0$$

$$E: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1^0 \\ n_2^0 \\ n_3^0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} n_1^0 \\ n_2^0 \\ n_3^0 \end{pmatrix} = 0$$

$$E: n_1^0 x + n_2^0 y + n_3^0 z - (n_1^0 p_1 + n_2^0 p_2 + n_3^0 p_3) = 0$$

$|\vec{p} \circ \vec{n}^0|$ entspricht dem Abstand zum Ursprung.



Umwandlung: Normalform – Parameterdarstellung

Für x und y werte annehmen und Ebenengleichung nach z umformen. Damit ist ein Punkt P_2 auf der Ebene bestimmt. Das gleiche für P_3 wiederholen. $\vec{a} = (\vec{p}_2 - \vec{p}_1)$, $\vec{b} = (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)$

Umwandlung: Parameterdarstellung – Normalform

$\vec{n}$ durch $\vec{a} \times \vec{b}$ bzw. $(\vec{p}_2 - \vec{p}_1) \times (\vec{p}_3 - \vec{p}_1)$ bestimmen (bei Hesse-NF normieren). P entspricht dem P bzw. dem P_1 auf der Parameterdarstellung.

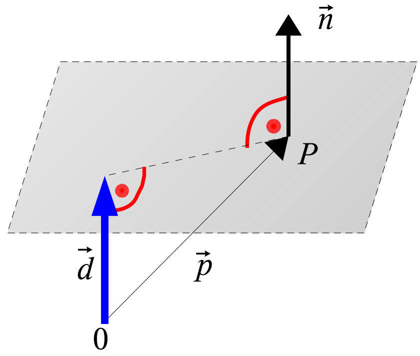
Abstand: Ebene – Ursprung

Der Abstand $\vec{d}$ ist eine Projektion von $\vec{p}$ auf $\vec{n}$.

$$\vec{d}=\vec{p}_{\vec{n}}=\frac{\vec{p}\circ\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\cdot\vec{n}$$

$$|\vec{d}|=|\vec{p}\circ\vec{n}^0|$$

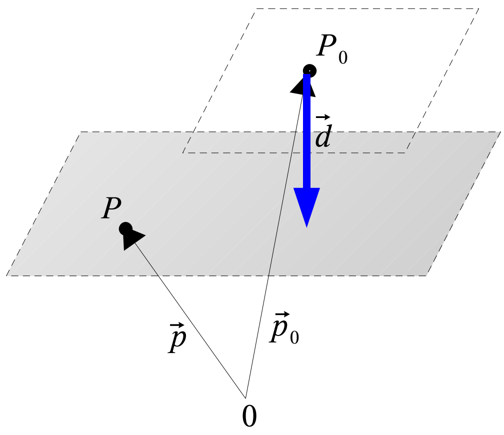
Aus Parameterdarstellung: $|\vec{d}|=|\vec{p}\circ\vec{n}^0|=|\vec{p}\circ(\vec{a}\times\vec{b})|$



Abstand: Punkt – Ebene

Es wird eine gedachte parallele Ebene konstruiert. Die Differenz der Abstände der beiden Ebenen zum Ursprung entspricht dem Abstand des Punktes P_0 zur Ebene.

$$|\vec{d}|=|\vec{p}\circ\vec{n}^0|-|\vec{p}_0\circ\vec{n}^0|$$



Vektorraum $\mathbb{R}^n$

$$\mathbb{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\middle| x_i\in\mathbb{R}\,;i=1,\ldots,n\right\}=\left\{(x_1,\vdots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}\,;i=1,\ldots,n\right\}$$

In diesem Raum sind definiert ($\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k\in\mathbb{R}^n\,;\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$):

- Linearkombination (Addition und skalare Multiplikation): $\vec{b}=\lambda_1\vec{a}_1+\lambda_2\vec{a}_2+\ldots+\lambda_k\vec{a}_k$
- Skalarprodukt: $\vec{a}\circ\vec{b}=\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$
- Betrag: $|\vec{a}|=\sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_i^2}$
- Winkel: $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b})=\arccos\left(\frac{\vec{a}\circ\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right)$
- Gerade und Ebene in Parameter-/Koordinatendarstellung

<u>Nicht</u> mehr möglich ist sind Vektorprodukt sowie die Normalform einer Ebene!

Gilt $\langle\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k\rangle=\mathbb{R}^n$, so heißt $\{\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k\}$ Erzeugendensystem von des $\mathbb{R}^n$.

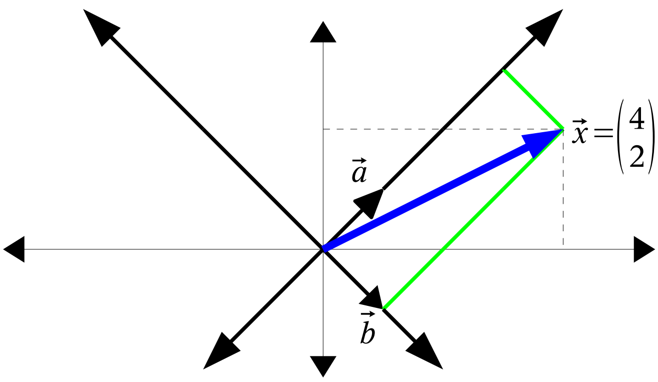
Lineare Abhängigkeit

k Vektoren $\vec{a}_1,\ldots,\vec{a}_k\in\mathbb{R}$ heißen linear abhängig (l.a.) $:\Leftrightarrow\exists\lambda_1,\ldots,\lambda_k\in\mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null sind, sodass $\lambda_1\vec{a}_1+\ldots+\lambda_k\vec{a}_k=\vec{0}$. Andernfalls heißen sie linear unabhängig (l.u.).

- Zwei Vektoren sind l.a., wenn sich einer durch die skalare Multiplikation eines anderen erzeugen lässt.
- Drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ sind dann l.u., wenn $det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})\neq 0$

Basis

- Man braucht n unabhängige Vektoren um $\mathbb{R}^n$ zu erzeugen.
- $\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ ist eine Basis des $\mathbb{R}^n$, die sogenannte kanonische Basis
- Die Basis eines Vektorraums ist nicht eindeutig, aber ihre Mächtigkeit. Sie bestimmt die Dimension des Raums.



Beispiel (rechts):

$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ bilden die Basis des $\mathbb{R}^2$. $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ soll in diesem Raum dargestellt werden.

$$\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\overset{!}{=}\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{matrix}\lambda_1+\lambda_2=4\\ \lambda_1-\lambda_2=2\end{matrix}\Leftrightarrow\lambda_1=3\wedge\lambda_2=1\Leftrightarrow\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$$

Matrizen

$$A = A(a_{ik}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ik} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine Matrix vom Typ $m \times n$ ist ein rechteckiges Zahlenschema aus m Zeilen und n Spalten.

Die Zahlen $a_{ik} \in \mathbb{R}$ heißen Elemente von A.

Wenn alle Diagonalen-Elemente 1 sind, nennt man dies Einheitsmatrix E; z.B.: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rang einer Matrix

Der Rang RgA der Matrix $A \in M(m, n)$ ist gleich der Anzahl der linear unabhängigen Zeilen bzw. Spalten. Er ändert sich nicht, wenn elementare Zeilen- oder Spaltenoperationen auf die Matrix angewandt werden.

1) $RgA \leq min(m, n)$
2) $RgA = RgA^T$
3) $RgE_n = n$ (Einheitsmatrix hat immer „vollen Rang“)
4) $det(A) = 0 \rightarrow RgA = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad RgA = 2 \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad RgB = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 8 & 6 & -7 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & -8 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & -5 \\ 8 & 6 & -1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \begin{array}{c} = \\ z_2 - 2z_1 \\ z_3 - z_1 \\ z_4 - z_1 \\ z_5 - 2z_1 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & -12 \end{pmatrix} \begin{array}{c} = \\ z_3 + z_2 \\ z_4 - 2z_2 \\ z_5 - 3z_2 \end{array} \begin{pmatrix} 4 & 3 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad RgA = 2$$

Transponieren

Vertauschen von Zeilen und Spalten. Wenn $A^T = A$, heißt A symmetrisch.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

Die Multiplikation ist nur dann definiert, wenn Spaltenzahl_A = Zeilenzahl_B ($m \times n \cdot n \times p$).
Wichtig: $A \cdot B \neq B \cdot A$!

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} + b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} \end{pmatrix}$$

Rechenregeln:

1) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$
2) $A \cdot E = E \cdot A = A$
3) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ (auf Reihenfolge achten!)
4) $A \cdot 0 = 0 ; 0 \cdot A = 0$
5) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Falk-Schema

Das Falk-Schema ist eine optische Vereinfachung der Matrixmultiplikation. Die Zeilen von A, die sich mit den Spalten von B „schneiden" werden elementweise miteinander multipliziert.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc|cc} & & & 1 & 4 \\ & A\cdot B & & 2 & 3 \\ & & & -1 & 2 \\ \hline 2 & 1 & -3 & 7 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cc|ccc} \multicolumn{2}{c|}{B\cdot A} & 2 & 1 & -3 \\ & & -1 & 0 & 2 \\ \hline 1 & 4 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & -1 & 7 \end{array}$$

Koordinatentransformation mit Matrizen

Gegeben seien:

$$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \rightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\} \text{ mit } \vec{a}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}=\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Welche Koordinaten habe die alten Basisvektoren bezüglich der neuen Basis? (Mit welchen Faktoren muss man die neuen Basisvektoren multiplizieren, um damit jeweils den „alten" zu erzeugen?)

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= 1\cdot\vec{a}_1+0\cdot\vec{a}_2+0\cdot\vec{a}_3 \\ \vec{e}_2 &= -1\cdot\vec{a}_1+1\cdot\vec{a}_2+0\cdot\vec{a}_3 \\ \vec{e}_3 &= 0\cdot\vec{a}_1-1\cdot\vec{a}_2+1\cdot\vec{a}_3 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Achtung: Hier werden Spalten nun zu Zeilen!)

Nun können die Koordinaten des Vektors $\vec{x}$ berechnet werden:

$$A\cdot\vec{x}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

Die Inverse A^{-1} ist quasi der Faktor, der mit A multipliziert wieder das neutrale Element E ergibt (bei reellen Zahlen 1). Sie kann nur von quadratischen Matrizen $A\in M(n,n)$ mit vollem Rang $RgA=n$ gebildet werden; ist dies möglich nennt man A regulär, ansonsten singulär.

1) $(A^{-1})^{-1}=A$
2) $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
3) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$
4) $(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$
5) $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\cdot A^{-1}$
6) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

Mit inversen Matrizen kann man nun Matrizengleichungen auflösen:

1) $A\cdot X=B \;\Leftrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot X=A^{-1}\cdot B \;\Leftrightarrow X=A^{-1}\cdot B$
   Achtung: $X\cdot A=B \;\Leftrightarrow X=B\cdot A^{-1}$
2) $A\cdot X+X=B \;\Leftrightarrow (A+E)X=B \;\Leftrightarrow X=(A+E)^{-1}B$
   Achtung: $X\cdot A+X=B \;\Leftrightarrow X=B(A+E)^{-1}$

Bildung inverser Matrizen

Mit elementaren Zeilen- bzw. Spaltenoperationen (nicht mischen!) muss die Ausgangsmatrix schrittweise der entsprechenden Einheitsmatrix angenähert werden: $(A|E)\rightarrow(E|A^{-1})$.
Zeilenoperationen werden von links, Spaltenoperationen von rechts durchgeführt.
Wird bei der Überführung mind. eine Zeile komplett Null, so ist die Matrix singulär und es gibt keine Inverse.

$$C=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&4\\1&5&7\end{pmatrix}$$

$$(C|E)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&3&4&0&1&0\\1&5&7&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&3&4&-1&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-1&-2&-2&1&0\\0&0&-2&-7&3&1\end{array}\right)$$

$$=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&\frac{-19}{2}&\frac{9}{2}&\frac{3}{2}\\0&-1&0&5&-2&-1\\0&0&-2&-7&3&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\0&1&0&-5&2&1\\0&0&1&\frac{7}{2}&\frac{-3}{2}&\frac{-1}{2}\end{array}\right)$$

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{-1}{2}\\-5&2&1\\\frac{7}{2}&\frac{-3}{2}&\frac{-1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-10&4&2\\7&-3&-1\end{pmatrix}$$

Bildung inverser Matrizen mit Determinanten (Inversenformel)

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\left((-1)^{i+j}\cdot|A_{ij}|\right)^T$$ (gilt natürlich nur, wenn A regulär ist)

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{pmatrix}\qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}a_{22}&a_{23}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a_{12}&a_{12}\\a_{31}&a_{32}\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}a_{12}&a_{13}\\a_{22}&a_{23}\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}a_{11}&a_{13}\\a_{21}&a_{23}\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix}^T$$

Der Einfachheit halber wurde $|A|$ nicht ausmultipliziert (einfach Determinante von A nehmen).
Transponieren nicht vergessen!

Determinanten

Determinanten können nur von quadratischen Matrizen $M(n,n)$ berechnet werden!

1) $|A|=|A^T|$
2) $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$
3) $|A+B|\neq|A|+|B|$ (!)

n = 2

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

n = 3 (nach Sarrus)

$$det(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{matrix}=a_1b_2c_3+b_1c_2a_3+c_1a_2b_3-a_3b_2c_1-b_3c_2a_1-c_3a_2b_1$$

n allgemein (nach Laplace)

Durch Streichen von je einer Zeile sowie einer Spalte werden Unterdeterminanten gebildet (sog. Adjunken). Deren Ergebnisse werden jeweils mit dem Matrix-Element multipliziert, in dem sich die gedachten „Streichlinien" kreuzen (eingezeichnet für a_{13}).

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{24} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}-a_{14}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

Ob die Unterdeterminanten addiert oder subtrahiert werden, wird nach folgendem Muster festgelegt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

Berechnung mit Dreiecksmatrix

$$|A|=a_{11}\cdot a_{22}\ldots a_n \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}$$

Elementare Zeilen- und Spaltenoperationen

Zeilen und Spaltenoperationen nicht mischen! Beachen, dass zum Beispiel beim Vertauschen zweier Zeilen die gesamte Determinante negiert werden muss!

1) Multiplikation einer Zeile/Spalte mit $\lambda\neq0$: $|B|=\lambda|A|$
2) Vertauschen zweier Zeilen/Spalten: $|B|=-|A|$
3) Addieren eines Vielfaches einer Zeile/Spalte zu einer Zeile/Spalte: $|B|=|A|$

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Ein LGS vom Typ $m \times n$ sieht folgendermaßen aus:

m: Anzahl der Gleichungen

n: Anzahl der Unbekannten

$$\begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +\dots & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +\dots & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & +\dots & +a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

In Matrixschreibweise:

$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

A : Koeffizientenmatrix

$\vec{x}$: Lösungsvektor

$\vec{b}$: rechte Seite

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

LGS können mit verschiedenen Verfahren wie dem Gauß'schem Eliminationsverfahren oder der Cramer'schen Regel (die auf Determinanten aufbaut) gelöst werden

Lösungsmöglichkeiten

1. genau eine Lösung ($RgA = n$)
2. unendlich viele Lösungen ($RgA < n$, aufgrund von Abhängigkeiten zwischen Gleichungen, müssen Parameter eingeführt werden; es ergibt sich z.B. eine Lösungsgerade bei einem Paramenter, Lösungsebene bei zweien usw.)
3. keine Lösung (es entsteht ein Widerspruch; z.B. $0 = 5$)

Beispiel mit einem 2×2 -System:

Eine Lösung:
(die Geraden Kreuzen sich)

$$A = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & | & -4 \\ 1 & 1 & | & 5 \end{array} \right| \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Unendlich viele Lösungen:
(Geraden liegen aufeinander)

$$A = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & | & -4 \\ -2 & 4 & | & 8 \end{array} \right|$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 0{,}5\lambda + 2 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Keine Lösung:
(Geraden parallel)

$$A = \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & | & -4 \\ 1 & -2 & | & 0 \end{array} \right| \quad \vec{b} = \emptyset$$

Ein homogenes LGS hat als Lösung den Nullvektor $\vec{0}$ und ist aufgrund dessen immer eindeutig lösbar (Triviallösung $\vec{0}$).
Erhält man eine allgemeine Lösung, z.B. Schnittgerade zweier Ebenen im dreidimensionalen Raum, so kann man man durch annehmen von Werten für die Parameter auch spezielle Lösungen bestimmen.

Cramer'sche Regel

Sie baut auf der Berechnung von Determinanten auf. Die Koordinaten des Lösungsvektors ergeben sich aus dem Quotienten der Determinanten $det(A_n)$, bei der die n-te Spalte durch die Ergebnis-Spalte ersetzt wurde, und der Determinante.

$$x_1 = \frac{det(A_1)}{det(A)} \quad \dots \quad x_n = \frac{det(A_n)}{det(A)}$$

Dieses Verfahren zur Lösung von LGS sollte nur bei 3 oder weniger Unbekannten angewendet werden, da sonst die Berechnung der Determinanten sehr aufwendig wird.

Gauß'sches Eliminationsverfahren

Es wird die Koeffizientenmatrix eines LGS in eine Einheitsmatrix (Diognale mit 1, Rest 0) umgeformt. Zuerst wird das Dreieck links unten der Diagonale von oben nach unten komplett eliminiert (alle Faktoren werden 0), dann das Dreieck rechts oben von unten aus. Hierbei können Vielfache von Zeilen zu anderen addiert werden, Zeilen und Spalten vertauscht werden.
Sollten im Laufe dieser Umformung eine oder mehrere Zeilen komplett Null werden, so waren die entsprechenden Gleichungen linear abhängig. Sind nun weniger Gleichungen als Unbekannte vorhanden, so <u>müssen Parameter eingeführt</u> werden (normalerweise griechische Kleinbuchstaben) um zu einer allgemeinen Lösung dieses System zu gelangen.

Beispiel:

x_1	x_2	x_3		*Operation*
2	3	0	0	
1	2	-2	7	*Zeile 1 nach oben verschieben*
2	1	8	-28	
1	2	-2	7	
2	3	0	0	*-2x Zeile 1; Vorzeichen umkehren*
2	1	8	-28	*-2x Zeile 1*
1	2	-2	7	
0	1	-4	14	
0	-3	12	-42	*+3x Zeile 2; Zeile wird 0;* ***Parameter!***
1	2	-2	7	*+ 2x Zeile 3*
0	1	-4	14	*+ 4x Zeile 3*
0	0	1	λ	
1	2	0	$7+2\lambda$	*- 2x Zeile 2*
0	1	0	$14+4\lambda$	
0	0	1	λ	
1	0	0	$-21+6\lambda$	
0	1	0	$14+4\lambda$	
0	0	1	λ	

Dieses LGS hat als unendlich viele Lösungen die auf einer Gerade liegen:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-21-6\lambda\\14+4\lambda\\\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-21\\14\\0\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}$$

Setzt man nun für λ z.B. 1 ein, erhält man eine spezielle Lösung (Punkt auf der Geraden):

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-27\\18\\1\end{pmatrix}$$

Komplexe Zahlen

Definition

- Imaginäre Einheit: $j := \sqrt{-1}$
- Menge der komplexen Zahlen: $\mathbb{C} := \{z = x + jy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$
- Enthalten die reelen Zahlen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- x ist der Real- und y der Imaginär-Teil
- Gleichheit: $x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$
- geometrische Darstellung in Gauß'scher Zahlenebene

Potenzen von j

...

$$j^{-4} = \frac{1}{j^4} = 1$$

$$j^{-3} = \frac{1}{j^3} = \frac{j}{j^4} = j$$

$$j^{-2} = \frac{1}{j^2} = -1$$

$$j^{-1} = \frac{1}{j} = \frac{j}{j^2} = -j$$

$$j^1 = j = \sqrt{-1}$$

$$j^2 = (\sqrt{-1})^2 = -1$$

$$j^3 = -1 \cdot j = -j$$

$$j^4 = j^2\, j^2 = 1$$

...

allgemein: $j^{4n} = 1$, $j^{4n+1} = j$, $j^{4n+2} = -1$, $j^{4n+3} = -j$

Inverses Element

Es gelten die Selben Rechenregeln wie bei reellen Zahlen.
Lediglich das inverse Element bez. der Multiplikation ist eine Besonderheit.

$$z = x + jy$$

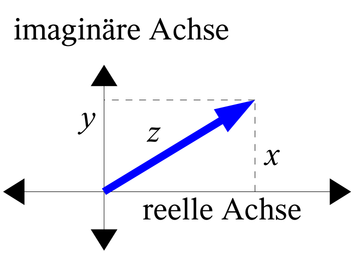
$$\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$z = -3 + j5$$

$$\frac{1}{z} = \frac{-3}{34} - j\frac{5}{34}$$

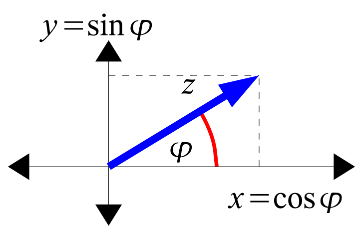
Darstellungsformen

<u>Normalform:</u> $z = x + jy$



<u>Polarform:</u> $z = r \cdot (\cos\varphi + j\sin\varphi)$

Es gilt die Eulerische Formel:
$e^{j\varphi} = (\cos\varphi + j\sin\varphi)$, deshalb ist folgende Kurzschreibweise ebenfalls korrekt: $z = r \cdot e^{j\varphi}$

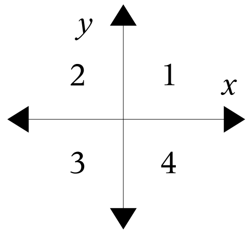


Umwandlung zwischen Darstellungsformen

Polarform → Normalform: $z = r \cdot \cos\varphi + j\, r \cdot \sin\varphi$

Normalform → Polarform: $z = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot e^{\arctan\left(\frac{y}{x}\right)}$

Zum Winkel φ muss, je nachdem in welchen Quadranten der komplexe Zeiger gerichtet ist, noch etwas dazu addiert werden (um negative Winkel zu vermeiden):



2. und 3. Quadrant: +π / +180°
4 Quadrant: +2π / +360°

Will man negative Zeiger zulassen (Elektrotechnik!) muss man nur Acht geben, wann der Zeiger die ±180° Grenze übertritt.

Rechnen in der Normalform

In dieser Schreibweise fällt die Addition und Subtraktion besonders leicht. Für Punktrechenarten sollte der Polarform der Vortritt gewährt werden.

Addition $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + j\,(y_1 + y_2)$

$z_1 = 3 + j5$, $z_2 = 1 - j2$ → $z_1 + z_2 = 4 + j3$

Multiplikation $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + j\,(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$z_1 = 3 + j5$, $z_2 = 1 - j2$ → $z_1 \cdot z_2 = 13 + j$

Division $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(x_1 + jy_1)(x_2 - jy_2)}{(x_2 + jy_2)(x_2 - jy_2)}$

$z_1 = \dfrac{4}{3} + j\dfrac{1}{2}$, $z_2 = \dfrac{4}{3} - j\dfrac{1}{2}$ → $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{55}{73} + j\dfrac{48}{73}$

Rechnen in der Polarform

Multiplikation $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

Exponentialform: $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$z_1 = 2 \cdot e^{j45°}$, $z_2 = 4 \cdot e^{j20°}$ → $z_1 \cdot z_2 = 8 \cdot e^{j65°}$

Spezialfälle:

1) Negation: $z \cdot -1 = r \cdot e^{j(\varphi + 180°)}$
2) Quadrat: $z^2 = r^2 \cdot e^{j2\varphi}$

Division $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + j \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

$z_1 = 5 \cdot e^{j120°}$, $z_2 = 2{,}5 \cdot e^{j45°}$ → $\dfrac{z_1}{z_2} = 2 \cdot e^{j75°}$

Exponentialform: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}$

Spezialfall:

1) Kehrwert: $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} \cdot e^{-j\varphi}$

Pontenzieren $z^n = r^n \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi)^n$

Exponentialform: $z^n = r^n \cdot e^{j(n \cdot \varphi)}$

$\left(4 \cdot e^{j40}\right)^3 = 64 \cdot e^{j120}$

Radizieren (Wurzel ziehen)

Wurzeln sind definiert als Ergebnis einer Potenz. Im $\mathbb{C}$ gibt es für die Gleichung $z^n = a = a_0 \cdot (\cos\alpha + j\sin\alpha)$ immer n Lösungen, wobei $0 \le k \le n$. Diese Lösungen liegen in einer Gauß'schen Zahlenebene auf einem Kreis mit $r = \sqrt[n]{a_0}$. Ist der Betrag, die Länge r des komplexen Zeigers, der Wurzel 1, so spricht man von der n-ten Einheitswurzel.

$$z_k = \sqrt[n]{a_0} \cdot (\cos(\frac{\alpha}{n} + k\frac{360°}{n}) + j\sin(\frac{\alpha}{n} + k\frac{360°}{n}))$$

Exponentialform: $z_k = \sqrt[n]{a_0} \cdot e^{j(\frac{\alpha}{n} + k\frac{360°}{n})}$

$z^3 = 1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{45}$

$z_0 = \sqrt{6} \cdot e^{j15°}$

$z_1 = \sqrt{6} \cdot e^{j135°}$

$z_2 = \sqrt{6} \cdot e^{j255°}$

Polynome (Nullstellen)

Definition

- $f(x)=a_n x^n+a_{n-1} x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0 \quad , D_f=\mathbb{R}$
- ein Polynom vom Grad n ($n\geq 1$) besitzt in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen
- ist x_1 eine Nullstelle so lässt sich das Polynom ohne Rest durch x_1 teilen (Polynomdivision)
- komplexe Nullstellen treten immer paarweise auf (ist z.B. z bekannt, ist $\bar{z}$ ebenfalls eine)

Polnomdivison

Die Nullstellen von Polynomen Grad > 2 lassen sich relativ einfach durch faktorisieren in Erfahrung bringen. Für jeden Schritt muss aber bereits eine Nullstelle bekannt sein (evtl. geraten).

$f(x)=2x^4-3x^3-10x^2+5x-6$ bekannte Nullstellen: $x1=-2, x2=3$

$$
\begin{array}{l}
2x^4-3x^3-10x^2+5x-6 : (x+2)=2x^3-7x^2+4x-3 \\
-(2x^4-4x^3) \\
\quad -7x^3-10x^2 \\
\quad -(-7x^3-14x^2) \\
\qquad 4x^2+5x \\
\qquad -(4x^2+8x) \\
\qquad\quad -3x-6 \\
\qquad\quad -(-3x-6) \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{l}
2x^3-7x^2+4x-3 : (x-3)=2x^2-x+1 \\
-(2x^3-6x^2) \\
\quad -x^2+4x \\
\quad -(-x^2+3x) \\
\qquad x-3 \\
\qquad -(x-3) \\
\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das bedeutet: $f(x)=(x+2)(x-3)\cdot 2(x^2-x+1)$. Der hintere Teil lässt sich, in diesem Fall, nur noch weiter mit Hilfe der komplexen Zahlen auflösen:

$$x3,4 = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{16}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}\pm\sqrt{\frac{-7}{16}} = \frac{1}{4}\pm j\sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{1}{4}\pm j\frac{1}{4}\sqrt{7}$$

Somit ergibt sich $f(x)=2\cdot(x+2)(x-3)(x-\frac{1}{4}+j\frac{1}{4}\sqrt{7})(x-\frac{1}{4}-j\frac{1}{4}\sqrt{7})$