# Digitale Signalverarbeitung

Studiengang: EI056

## Allgemein

### Vorteile

- kostengünstiger (hohe Integrationsdichte)
- störsicher (hohe Reproduzierbarkeit)
- temperatur- und altersstabil
- kein Abgleichen (normalerweise)
- leistungsfähige Algorithmen mit mehr/neuen Möglichkeiten

### Nachteile

- im hochfrequenten Bereich schwer/nicht realisierbar
- Zusätzliche Hardware (A/D-, D/A-Wandler usw)

### Systembeschreibung (zeitkontinuierlich)

- Differenzialgleichung
  $a_0 y(t)+a_1 \dot{y}(t)+a_2 \ddot{y}(t)+\ldots=b_0 x(t)+b_1 \dot{x}(t)+b_2 \ddot{x}(t)\ldots$
- Laplace-Übertragungsfunktion
  $H(s)=\frac{Y(s)}{S(s)}=\frac{b_0+b_1 s+b_2 s^2+\ldots}{a_0+a_1 s+a_2 s^2+\ldots}$
- Impulsantwort $h(t)$
- Frequenzgang (Amplituden- und Phasengang, FT von $h(t)$ )
  $H(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}$

### Systembeschreibung (zeitdiskret)

- Differenzengleichung
  $y[n]=\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot x[n-i]-\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot y[n-i]$
- z-Übertragungsfunktion
  $H(z)=\frac{\sum_{i=0}^{k} b_i \cdot z^{-i}}{1+\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot z^{-i}}$
- Impulsantwort $h[n]$
- Frequenzgang
  $H(\Omega)=\frac{Y(\Omega)}{X(\Omega)}$

# Signale im Zeit- und Frequenzbereich

### Fourierreihe

periodischen Signale → diskretes Linienspektrum, Abstand $\Delta f = \frac{1}{T_0} = f_0$

$$x_p(t) = \frac{a_0}{2} + \sum \left[ a_k \cos(2\pi f_0 t) + b_k \sin(2\pi f_0 t) \right] \quad , k = 1 \ldots \infty$$

Fourier-Koeffizienten:

$$a_0 = \frac{2}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{+T_0}{2}} x(t)\, dt \qquad a_k = \frac{2}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{+T_0}{2}} x(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 t)\, dt \qquad b_k = \frac{2}{T_0} \int_{\frac{-T_0}{2}}^{\frac{+T_0}{2}} x(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 t)\, dt$$

### Fouriertransformation (FT)

aperiodische Signale → kontinuierliches Spektrum ( $\omega_0 \to 0$ )

$$\underline{X}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt$$

$\underline{X}$ ist komplexwertig, stellt die Aplitudendichte dar $[\mathrm{Vs}]$ oder $\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{Hz}}\right]$.

### Inverse Fouriertransformation (IFT)

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(j\omega) \cdot e^{j\omega t}\, d\omega$$

### Zeit-Bandbreiten-Produkt

Optimales Verhältnis ist bei Gauss-Impuls gegeben:

$$\text{Signaldauer} \cdot \text{Bandbreite (Breite des Spektrums)} > \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Es ist nicht möglich Zeitsignale zu finden, die beliebig kurz sind und gleichzeitig beliebig kleine Bandbreiten aufweisen.

### Faltung

Eine Multiplikation im Zeit- entspricht einer Faltung im Bildbereich (und umgekehrt).

$$x_1(t) \cdot x_2(t) \to \frac{1}{2\pi} X_1(j\omega) * X_2(j\omega) \qquad X_1(j\omega) * X_2(j\omega) \to x_1(t) \cdot x_2(t)$$

### Dirac-Impuls

Unendlich kurzer und hoher Impuls mit der Fläche 1. Das Spektrum eines einmaligen Impulses enthält alle Frequenzen gleichwertig, das einer Impulsfolge ebenfalls eine Impulsfolge.
Der digitale Impuls hat den Wert eins und ist genau eine Abtastzeit lang.

# Digitale Signale

## Abtastung

Das zeitkontinuierliche Signal muss zuvor bandbreiten-begrenzt sein (Abtast-Theorem). Es lässt sich durch eine Folge von bewerteten Dirac-Impulse darstellen.

$$x_a(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x\underbrace{(t)\cdot\delta(t-n\cdot T_a)}_{\text{Delta-Impuls Kamm}}=\sum_{-\infty}^{+\infty} x[n\cdot T]\cdot\delta(t-n\cdot T_a)=x[n\cdot T_a]=x[n]$$

Diese Abtastung entspricht einer Faltung mit einem Spektrum von Dirac-Impulsen. Das Ergebnis ist ein sich periodisch wiederholendes, kontinuierliches, symmetrisch an der Abtastfrequenz gespiegeltes Spektrum.

$$X_a(f)=\frac{1}{T_a}\sum_{-\infty}^{+\infty} X(f-n\cdot f_a)$$

## Fouriertransformation für Abtastsignale (FTA)

$$X_a(f)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT]\cdot e^{-j\omega t}$$

Die Zerlegung der Euler-Funktion in $\cos$ und $\sin$ zeigt, dass es sich um ein periodisches Spektrum handelt. Es bleibt das "Problem" der unendlichen Summationsgrenzen.

## Inverse Fouriertransformation für Abtastsignale (IFTA)

$$x[nT]=\frac{T}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{T}}^{\frac{+\pi}{T}} X_a(f)\cdot e^{-j\omega nT}\,dt$$

## Aliasing

Überlappung der Spektren im Frequenzbereich aufgrund zu geringer Abtastfrequenz ( $f_a<2\cdot f_s$ ). Das Ausgangssignal lässt sich nicht mehr mit einem Tiefpass in das ursprüngliche Eingangssignal zurückverwandeln.

## LTD-Systeme

Lineare zeitinvariante diskrete Systeme bestehen grundsätzlich aus Verzögerungsgliedern, Multiplizierern und Addierern. Grafische Darstellung bspw. als Direktstruktur.

# Diskrete Fouriertransformation (DFT)

Eine Näherung der FTA (welche eine Summe über einen unendlichen Zeitraum bildet).
Zeit- ( $x[n]$ ) als auch Frequenzbereich ( $X[k]$ ) sind diskret und von endlicher Länge.
$N$ Abtastwerte ergeben $N$ Spektralwerte, die im Bereich $0 \ldots f_a$ verteilt sind.

Die Eingangsfolge $x[n]$ wird als periodisch angenommen, sodass es zu Fehlern im Spektrum kommt, wenn das Signal nicht genau in die Anzahl der Abtastwerte "passt" (es treten Sprünge auf).

DFT (Analysegleichung): $X[k]=\sum_{n=0}^{N-1} x[nT]\cdot e^{-j2\pi\frac{kn}{N}}$

IDFT (Synthesegleichung): $x[n]=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]\cdot e^{-j2\pi\frac{km}{N}}$

## Fensterung

Das "Ausschneiden" von N Abtastwerten geschieht durch Multiplikation mit einer Fensterfunktion im Zeitbereich. Um Störungen durch Sprünge am Beginn und Ende der transformierten Folge abzumildern, nutzt man verschiedene Fensterfunktionen mit harmonischem Ein- und Ausschwingverhalten. Fensterfunktionen mit Formeln, Selektivitätskurven und Eigenschaften in aus Tabelle entnehmen.

## Verschmierung und Lecken

Fensterfunktionen stellen immer Kompromiss zwischen wenig Verschmierung (hohe Selektivität, schmale Hauptkeule) und wenig Lecken dar (min. Unterdrückung der Nebenkeulen). Beides sind Fehler die in dem Fall auftreten, dass die Signalfrequenz nicht mit einem ganzzahligen Vielfachen in die Abtastwerte "passt". Fallen mehr als eine Spektrallinie in die Hauptkeule so spricht man von Verschmierung. Liegen die Restlichen nicht mehr genau auf den Nullstellen des Spektrums der Fensterfunktion (si-Funktion bei Rechteckfenster) so bezeichnet man dies als Lecken.

## Frequenzauflösung

Der Abstand zweier Spektrallinien $\Delta f=\frac{f_a}{N}$ sinkt mit höherer Anzahl von Abtastwerten. Die Frequenzauflösung ist also antiproportial zur Messdauer.

## Fast Fourier Transformation (FFT)

Keine neue Transformation, lediglich eine effiziente Implementierung der FT. Statt quadratischem Laufzeitverhalten (bezogen auf die Blocklänge) zeigt die FFT lineares. Der bekannteste Algorithmus ist Radix-2. Eine Transformation wird hier rekursiv in Untertransformationen zerlegt. Die Blocklänge muss immer einer Zweierpotenz entsprechen.

## Filter im Frequenzbereich mit Hilfe der FFT

Durch ein recht einfaches Verfahren kann man digitale Filter mit steilen Flanken (aber hohem Ripple) erstellen:

1. FFT des Zeitsignals
2. Ausschneiden der gewünschten Frequenzen, Rest auf Null setzen
3. IFFT

# Digitale Filter

## Zusammenfassung z-Transformation

- Zweck der z-Transformation: Vereinfachung der Behandlung digitaler Systeme.
- Lineare Differenzengleichungen werden in algebraische Gleichungen umgewandelt.
- Zuerst eingeführt über FT der Differenzengleichung $z = \mathrm{e}^{j2\pi f T_a}$ gesetzt.
  Damit alle Frequenzen auf $f_a$ normiert $\left(\frac{f}{f_a}\right)$.
- durchläuft $f$ sämtliche Werte von $-\infty$ bis $+\infty$, durchläuft z zyklisch den komplexen Einheitskreis
- dies war eine Variablentransformation ( $z = \mathrm{e}^{j2\pi f T_a}$ )

Verallgemeinerung auf die allgemeine z-Transformation führt zum Übergang auf die gesamte z-Ebene.

Allgemein gilt für jede Folge bis $x[n]$ mit $-\infty < n < +\infty$

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot z^{-n}$ mit $z \in Kb \in \mathbb{C}$ $Kb$ : Konvergenzbereich

Das heißt, die Zahlenfolge wird durch eine Funktion $X[z]$ in der komplexen z-Ebene repräsentiert (Bildbereich).

Jedes System kann durch seine Impulsantwort $h[n]$ vollständig beschrieben werden.

Unser Interesse:

1. Übertragungseigenschaften von digitalen Systemen ermitteln, d.h. Amplitudengang $H(f) = H[z]$ an der Stelle $z = \mathrm{e}^{j2\pi f T_a}$ und Phasengang = $\arctan\left(\frac{\Im(H(z))}{\Re(H(z))}\right)$
2. Übertragungsfunktion $H[z]$ und deren Pole und Nullstellen, um wichtige Systemeigenschaften zu erkennen

## Filtereigenschaften

- reellwertig: Pol-/Nullstellen-Konfig. symmetrisch zur reellen Achse
- stabil: alle Polstellen innerhalb des Einheitskreises
- linearphasig: alle Polstellen im Ursprung; alle Nullstellen symmetrisch zum Kreis; Koeffizienten paarweise zur Filtermitte

## Linearphasige FIR-Filter

| Typ | h[n] | Filterordnung N | Frequenzgang $H(\mathrm{e}^{j\Omega})$ | $H(\mathrm{e}^{j\Omega})=0$ bei | mögliche Filter |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | symmetrisch | gerade | reell | | alle |
| 2 | symmetrisch | ungerade | reell | $\pm\pi$ | TP, BP |
| 3 | punktsymmetrisch | gerade | imaginär | $\Omega = ⬩$ $\pm\pi$ | BP |
| 4 | punktsymmetrisch | ungerade | imaginär | $\Omega = 0$ | HP, BP |

### Vergleich von FIR- und IIR-Filtern

| Kriterium | FIR-Filter | IIR-Filter |
|---|---|---|
| Filterarten | TP, HP, BP, BS, Multibandfilter, Differentiator, Hilbert-Transformator | TP, HP, BP, BS, Allpass, Integrator |
| Stabilität | stets stabil | u.U. instabil |
| Linearer Phasengang | Einfach möglich | nur akausal möglich (nur rechnerisch) |
| Gruppenlaufzeit | groß und bei linearphasigen Filtern frequenzunabhängig | klein und frequenzvariabel (minimalphasige Systeme sind einfach machbar) |
| Realisierungsaufwand (Filterlänge) | groß | klein |
| Beeinflussung durch Quantisierung der Koeffizienten | klein | groß |
| Beeinflussung durch Störungen | nur kurz wirksam | u.U. lange wirksam |

Minimalphasig → bei geg. Amplitudengang wird der Phasengang und auch die Gruppenlaufzeit minimal

### Schema zur Filterentwicklung

1. Spezifikation aus der Anwendung (Eckfrequenzen, Sperrdämpfungen, ...)
2. FIR- oder IIR-Filter ?
3. Abtastfrequenz
   - hoch
     - Anforderungen an die Hardware hoch
     - Einfluss der Koeffizienten-Quantisierung groß
     - Anti-Aliasing-Filter einfach (analoger Aufwand gering)
   - tief
     - (Umkehrung obiger Punkte)
4. Filter dimensionieren:
   - Ordnung
   - Koeffizienten
   - Abtastintervall
   - Methoden
     - FIR: Fensterverfahren, Frequenzabtastung, z-Bereich (direkt, Approx.)
     - IIR: Bilineare Transformation, Impulsinvariante Transformation, z-Bereich (direkt)
5. evtl. Struktur umwandeln (HP, TP, BP, BS)
6. Kontrolle der Performance durch Analyse/Simulation
   evtl. Redesign: Filtertyp, Filterordnung, Abtastfrequenz, Koeffizienten feiner quantisieren
7. Hardware auswählen, Filter implementieren
8. Erfahrungen dokumentieren